Calcul de la fonction d'Artin d'une singularité plane

Sahar Saleh

Année 2010

N° d'ordre 1053

CALCUL DE LA FONCTION D'ARTIN D'UNE SINGULARITE PLANE

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Ecole Doctorale : STIM

Présentée et soutenue publiquement :

Le 28 juin 2010

à 14h

Par **Sahar SALEH**

Devant le jury ci-dessous :

- Mr Antonio Campillo (rapporteur), Professeur à l'Université de Valladolid
- Mr Philippe Dubois (examinateur), Professeur à l'Université d'Angers
- Mr Jean-Michel Granger (examinateur), Professeur à l'Université d'Angers
- Mme Monique Lejeune- Jalabert (examinatrice), DR CNRS à l'Université de Versailles
- Mr Mark Spivakovsky (examinateur), DR CNRS à l'Université de Toulouse

Directeur de thèse: Mr Abdallah Assi, MCF-HDR à l'Université d'Angers

Nom et coordonnées du laboratoire: LAREMA, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier
49045 Angers Cedex 01

ED STIM-ED 503

Remerciements

J'aime bien remercier ici toutes les personnes qui m'ont accompagnée et aidée dans ce travail.

Je tiens à remercier Mr Abdallah Assi, Directeur de thèse, pour ce sujet intéressant et pour m'avoir ouvert un chemin de recherche si vaste. Je le remercie aussi pour toutes les maths que j'ai pu apprendre avec lui.

Je tiens à remercier Antonio Campillo et Mark Spivakovsky pour avoir accepté de rapporter sur ce travail et pour leurs remarques et conseils précieux.

Je tiens à remercier le laboratoire LAREMA, en particulier l'équipe des singularités, je remercie vivement Jean Michel Granger et Philippe Dubois pour avoir accepté de siéger au jury.

Les conversations avec Monique Lejeune-Jalabert m'ont été d'une grande utilité. Je la remercie chaleureusement pour avoir accepté de faire partie du jury.

Les idées de Michel Hickel et ses suggestions à travers des discussions avec Abdallah Assi m'ont été très bénéfiques. Qu'il trouve ici toute ma gratitude.

J'ai aussi une pensée particulière pour tous les doctorants qui ont bien facilité le travail de bureau : Ablaye, Alexandre, Alexei, Fabien, Fanny, Georges, Joseph, Julie, Kana, Paulo, Rémi, Rodolphe, Romain, Serge, Suzanne, Thomasz, Xiaoguang et Yafei.

Je remercie chaleureusement ma famille pour leur soutien moral dès le début de mes études universitaires. Je tiens par dessus tout à remercier mon fiancé Saed pour tout son encouragement, son appui et son soutien personnel inconditionnel, pour sa présence à mes côtés durant tout le trajet de ma recherche, pour tout...

Enfin, je n'aurais pas pu accomplir ce travail sans le soutien financier dont j'ai bénéficié de la part du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, je lui exprime ma sincère gratitude.

Table des matières

Introduction

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et soit $\mathbf{A} = \mathbf{K}[[t_1, \ldots, t_N]], N \geq 1$ l'anneau des séries formelles en $t_1, \ldots, t_N$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. Soit $I = (f_1, \ldots, f_p)$ un idéal non nul de l'anneau $\mathbf{A}[[x_1, \ldots, x_e]]$ des séries formelles en $x_1, \ldots, x_e$ à coefficients dans $\mathbf{A}$. D'après M. Artin[4], G.Pfister et D. Popescu[21], il existe une fonction b de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que si $t = (t_1, \ldots, t_N)$ alors pour tout entier i et pour tout $F(t) = (F_1(t), \ldots, F_e(t))$ dans $\mathbf{A}^e$:

si pour tout j, $f_j(F(t))$ est dans $(t)^{b(i)+1}$, où (t) est l'idéal maximal dans $\mathbf{A}$, alors il existe $G(t) = (G_1(t), \ldots, G_e(t))$ dans $\mathbf{A}^e$ tel que $f_j(G(t)) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$ et $G(t) - F(t)$ est dans $((t)^{i+1})^e$.

La fonction d'Artin, notée β, est la plus petite fonction vérifiant cette propriété.

Supposons $N = 1$ et soit $V = V(I)$ la variété analytique définie par l'idéal I. Appelons arc tout élément $G(t) = (G_1(t), \ldots, G_e(t))$ dans $\mathbf{A}^e = \mathbf{K}[[t_1]]^e$ tel que $f_j(G(t)) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$. Dans ce cas, la fonction d'Artin, appelée aussi la fonction d'Artin-Greenberg, mesure l'ordre minimal d'un élément de $\mathbf{A}^e$ au delà duquel cet élément se relève en un arc.

En général, les $\beta(i), i \in \mathbb{N}$ sont des invariants analytiques de V. On sait aussi que V est non singulière si et seulement si $\beta(i) = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Dans le cas où $V = V(f)$ est une singularité d'hypersurface, la fonction d'Artin a été étudiée par M. Hickel et M. Lejeune-Jalabert dans leurs travaux sur les arcs tracés sur V (voir [14] et [17]).

Le but de ce travail est de calculer la fonction d'Artin pour les singularités de courbes planes, et les singularités quasi-ordinaires. Le point de départ est le travail de Hickel qui calcule dans [15] la fonction d'Artin d'une singularité de courbe irréductible. Plus précisement, soit

$$f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

un polynôme distingué (i.e. $a_i(0) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$) et irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ et rappelons, par le Théorème de Newton-Puiseux, que :

$$f(t^n, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i(t))$$

où $y_1(t), \ldots, y_n(t) \in \mathbf{K}[[t]]$ sont liées par les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{K}$. Etant donné un polynôme non nul $g \in \mathbf{K}[[x]][y]$, on note $\mathrm{int}(f, g)$ l'ordre en t de $g(t^n, y_1(t))$. L'ensemble

$$\{int(f, g), g \in \mathbf{K}[[x]][y]\}$$

est un semi-groupe de $\mathbb{N}$, noté $\Gamma(f)$. Notons que dans ce cas $\Gamma(f)$ est finiment engendré, i.e. il existe $r_0, r_1, \ldots, r_h \in \Gamma(f)$ tel que pour tout $g \in \mathbf{K}[[x]][y]$, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{N}$ tel que $int(f,g) = \sum_{i=0}^{h} \lambda_i.r_i$.

Dans son travail, outre des formules explicites pour la fonction d'Artin de f, Hickel montre que cette fonction augmentée de la multiplicité à l'origine de f détermine $\Gamma(f)$.

Supposons plus généralement que le polynôme f n'est pas nécessairement irréductible, et soit

$$f = \prod_{i=1}^{s} f_i$$

sa décomposition en polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$. L'ensemble

$$\{int(f,g) = (int(f_1,g), \ldots, int(f_s,g)), g \in \mathbf{K}[[x]][y]\}$$

est un semi-groupe de $\mathbb{N}^s$. C'est le semi-groupe de f, noté $\Gamma(f)$. Contrairement au cas irréductible, ce semi-groupe n'est jamais de type fini. Dans [6], [8], et [11], A. Campillo, F. Delgado, A. Garcia, et S. Gusein-Zade ont montré l'existence d'un ensemble fini de $\Gamma(f)$, les maximaux absolus irréductibles, qui permet avec d'autres invariants de la singularité de décrire tout le semi-groupe. Dans le premier chapitre, on rappelle ces résultats puis on montre que cet ensemble peut être décrit à l'aide de l'arbre des contacts introduit par S.S. Abhyankar et A. Assi(voir [3]).

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude de la fonction d'Artin-Greenberg de f. Après avoir rappelé le résultat de M. Hickel, et par souci de clarté, on donne une description de cette fonction lorsque f est un produit de deux branches irréductibles, et on montre que cette fonction augmentée de celles des deux composantes et de leurs multiplicités à l'origine détermine l'ensemble des maximaux absolus irréductibles, et donc le semi-groupe $\Gamma(f)$. On montre aussi que cette fonction est un invariant de la classe d'équisingularité de f. Le calcul de la fonction d'Artin-Greenberg dans le cas général est fait dans la section 2.4. Outre des formules explicites de cette fonction, on montre, comme dans le cas de deux branches, que cette fonction augmentée de celles des composantes et de leurs multiplicités à l'origine détermine l'ensemble des maximaux absolus irréductibles de $\Gamma(f)$. Dans la section 2.5, on donne un programme en MAPLE qui calcule la fonction d'Artin dans le cas de deux branches.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à une approximation des solutions d'une singularité quasi-ordinaire irréductible. Rappelons brièvement les propriétés d'une telle singularité : soit

$$f(\underline{x}, y) = y^n + a_1(\underline{x})y^{n-1} + \ldots + a_n(\underline{x})$$

un polynôme non nul distingué de $\mathbf{K}[[\underline{x}]][y]$ où $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_e)$. Supposons que le discriminant de f est de la forme $x_1^{N_1}.\ldots.x_e^{N_e}.u(x_1, \ldots, x_e)$, où $N_1, \ldots, N_e \in \mathbb{N}$ et $u(0) \in \mathbf{K}^*$. Un tel polynôme est dit quasi-ordinaire. Supposons que f est irréductible, d'après le théorème d'Abhyankar-Jung, toutes les racines $y = y(\underline{x})$ de $f = 0$ sont dans $\mathbf{K}[[x_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{n}}]]$. Posons $x_1 = t_1^n, \ldots, x_e = t_e^n$ et soit $y_1(\underline{t}) = y_1(t_1, \ldots, t_e) \in \mathbf{K}[[t_1, \ldots, t_e]]$ (qu'on note $\mathbf{K}[[\underline{t}]]$) tel que $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y_1(\underline{t})) = 0$. On a :

$$f(t_1^n, \dots, t_e^n, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - y_i(\underline{t}))$$

où $y_1(t), \dots, y_n(t) \in \mathbf{K}[[t]]$ sont liées par les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{K}$.

Étant donnée une série $u = \sum_p c_p \underline{t}^p$ dans $\mathbf{K}[[\underline{t}]]$, on note $\mathrm{In}(u)$ la forme initiale de u : si $u = u_d + u_{d+1} + \dots$ est la décompostion de u comme somme de composantes homogènes, alors $\mathrm{In}(u) = u_d$. On pose $d = \mathrm{O}_{\underline{t}}(u)$ et on l'appelle le $\underline{t}$-ordre de u. On note $\exp(u)$ l'exposant dominant de u : c'est le plus grand exposant dans $\mathrm{In}(u)$ par rapport à l'ordre lexicographique. Soit g un polynôme non nul quasi-ordinaire de $\mathbf{K}[[x_1, \dots, x_e]][y]$. L'ordre de g par rapport à f, noté $\mathrm{O}(g, f)$, est défini par $\exp(g(t_1^n, \dots, t_e^n, y_1(\underline{t}))$. Notons que cet ordre ne dépend pas du choix de la racine $y(\underline{t})$ de $f(t_1^n, \dots, t_e^n, y) = 0$. L'ensemble $\{\mathrm{O}(f, g) | g \in \mathbf{K}[[x_1, \dots, x_e]][y]\}$ est un semi-groupe de $\mathbb{N}^e$. On l'appelle le semi-groupe associé avec f et on le note $\Gamma(f)$. Cette notion a été introduite par M.Micus [16] où un ensemble de générateurs du semi-groupe est construit. La même construction a été faite par P. Gonzalez-Perez [12] et développée par lui et par P. Popescu [22]. Notons que dans ce cas, le semi-groupe de f est finiment engendré, i.e. il existe $\underline{r} = (r_1, \dots, r_h) \in (\Gamma(f))^h$ tel que $\underline{r}$ et la base canonique de $(n\mathbb{Z})^e$ engendrent $\Gamma(f)$.

Dans les sections 3.1 et 3.2, on rappelle la construction du semi-groupe de f. On introduit ensuite une "fonction d'Artin modifiée"(voir 3.4.1.). Dans la section 3.4. on donne des formules explicites de cette fonction, puis on montre que celle-ci augmentée de n détermine le semi-groupe de f.

Soit $F(x, y) = f(x, \dots, x, y)$ et supposons de plus que $f = y^n - x_1^{m_1} \cdot \dots \cdot x_e^{m_e}$ où $\mathrm{pgcd}(n, m_1, \dots, m_e) = 1$, i.e. f est quasi-ordinaire à un seul exposant caractéristique. Dans la section 3.5. on étudie le lien entre la fonction d'Artin-Greenberg β_F de F, et la "fonction d'Artin modifiée" β_f de f. On donne dans ce cas une condition nécessaire et suffisante pour que $\beta_F = \beta_f$. Dans la section 3.6. on donne un programme MAPLE calculant la "fonction d'Artin modifiée" d'un polynôme quasi-ordinaire.

Chapitre 1

Le semi-groupe d'une courbe plane

1.1 Courbes irréductibles

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractérisque zéro et soit f un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ de degré $n > 0$. Écrivons

$$f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x).$$

D'après le théorème de Newton-Puiseux, il existe une série formelle $y(t) \in \mathbf{K}[[t]]$ telle que

$$f(t^n, y(t)) = 0.$$

De plus,

$$f(t^n, y) = \prod_{w \in U_n} (y - y(wt))$$

où U_n est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{K}$.
Notons $y_i(t), i = 1, \ldots, n$ les racines de $f(t^n, y) = 0$. Posons $y_1(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j.t^j$. On pose $\text{supp}(y_1) = \{j | c_j \neq 0\}$ et on appelle $\text{supp}(y_1)$ le support de $y_1(t)$. Clairement $\text{supp}(y_i) = \text{supp}(y_1)$ pout tout $2 \leq i \leq n$. On note cet ensemble $\text{supp}(f)$ et on l'appelle le support de f. On associe avec f les suites caractéristiques $(m_i)_{i \geq 0}, (d_i)_{i \geq 0}$ définies comme suit :
$d_0 = m_0 = d_1 = n, m_1 = inf\{j \in \text{supp}(f) | d_1 \text{ ne divise pas } j\}$ et pour tout $i \geq 2$,

$$d_i = \text{pgcd}(m_{i-1}, d_{i-1}), m_i = inf\{j \in \text{supp}(f) | d_i \text{ ne divise pas } j\}.$$

On sait qu'il existe h tel que $d_{h+1} = 1$. On note par convention $m_{h+1} = +\infty$.
On définit la suite $(r_i)_{0 \leq i \leq h}$ par :
$r_0 = m_0, r_1 = m_1$, et $r_{i+1} = r_i.\dfrac{d_i}{d_{i+1}} + m_{i+1} - m_i$ pour $i = 1, \ldots, h-1$.
Etant donnée une série formelle $u(t) = \sum_p c_p t^p$ dans $\mathbf{K}[[t]]$, le t-ordre de u, noté $\text{O}_t(u)$, est le plus petit entier i tel que $u \in (t)^i$, où (t) est l'idéal maximal de $\mathbf{K}[[t]]$.
Soit $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ les racines de f, on a le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *i)* $\{\mathrm{O}_t(y_i - y_j) | 1 \leq i \neq j \leq n\} = \{m_1, \dots, m_h\}$.
ii) Soit $1 \leq l \leq h$, *et soit* $1 \leq j \leq n$, *le cardinal de* $\{y_i | \mathrm{O}_t(y_i - y_j) = m_l\}$ *est* $d_l - d_{l+1}$.

Démonstration : Soit $1 \leq i \neq j \leq n$ et écrivons

$$y_i(t) = \sum_k b_k t^k.$$

Soit $w \in U_n$ tel que $y_j(t) = y_i(wt)$. On a

$$y_i(t) - y_j(t) = \sum_k (1 - w^k).b_k t^k$$

i) Soit s l'ordre de $y_i(t) - y_j(t)$.
Il vient que $w^n = 1 = w^k$ pour tout $k \in supp(y_i), k \leq s$, en particulier $w^d = 1$, où $d = \mathrm{pgcd}(n, k; k \in supp(y_i), k \leq s)$.
Mais d'après la définition des suites caractéristiques, $d \in \{d_1, d_2, \dots, d_h\}$, ce qui implique que $s \in \{m_1, \dots, m_h\}$.

ii) Avec les notations ci-dessus, si $\mathrm{O}_t(y_i(t) - y_i(wt)) > m_l$, alors $w^k = 1$ pour tout $k \in supp(y_i), k \leq m_l$. Ceci implique que $w^{\mathrm{pgcd}(n,k|,k \in supp(y_i), k \leq m_l)} = 1 = w^{d_{l+1}}$.
Réciproquement, il est clair que si $w^{d_{l+1}} = 1$, alors $\mathrm{O}_t(y_i(t) - y_i(wt)) > m_l$. Par conséquent, le cardinal de $\{y_i | \mathrm{O}_t(y_i - y_j) > m_l\}$ est d_{l+1}.

Mais

$$\{y_i(t) | \mathrm{O}_t(y_i(t) - y_j(t)) = m_l\} = \{y_i(t) | \mathrm{O}_t(y_i(t) - y_j(t)) > m_{l-1}\} - \{y_i(t) | \mathrm{O}_t(y_i(t) - y_j(t)) > m_l\}$$

ce qui montre le résultat.

Définition 1.1.2 *Soit* $\phi(t) = (t^p, Y(t)), \psi(t) = (t^q, Z(t))$ *deux éléments non nuls de* $\mathbf{K}[[t]]^2$. *On définit le contact entre* ϕ *et* ψ *par* $c(\phi, \psi) = \dfrac{1}{pq}\mathrm{O}_t(Y(t^q) - Z(t^p))$.
Le contact de f *avec* ϕ, *noté* $c(f, \phi)$, *est défini par*

$$c(f, \phi) = max\{c(\phi, \psi), \text{ où } \psi = (t^n, y(t)) \text{ est une racine de } f(x, y) = 0\}.$$

Définition 1.1.3 *Soit* $g = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \dots + b_m(x)$ *un polynôme irréductible de* $\mathbf{K}[[x]][y]$, *et soit* $\psi(t) = (t^m, z(t))$ *une racine de* $g(x, y) = 0$. *On définit le contact entre* f *et* g *noté* $c(f, g)$ *par* $c(f, g) = c(f, \psi)$. *On définit la multiplicité d'intersection de* f *et* g, *noté* $int(f, g)$, *par* $int(f, g) = \mathrm{O}_t(f(\psi))$. *Notons que ces deux définitions ne dépendent pas du choix de la racine* ψ *de* g.

Soit $H(x, y)$ un polynôme réductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$, soit

$$H = \prod_{i=1}^{r} H_i.$$

la décomposition de H en polynômes irréductibles. La multiplicité d'intersection de H avec f est donnée par

$$int(f,H) = \sum_{i=1}^{r} int(f,H_i).$$

Avec ces notations on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.4 *Soit $g = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \ldots + b_m(x)$ un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit $c = c(f,g)$.*

i) Si $c < \dfrac{m_1}{n}$, alors $int(f,g) = n.c.m$.

ii) Si $\dfrac{m_a}{n} \leq c < \dfrac{m_{a+1}}{n}$, $0 \leq a \leq h$ alors $int(f,g) = (r_a d_a + (nc - m_a)d_{a+1}).\dfrac{m}{n}$.

iii) Si $c > \dfrac{m_a}{n}$, alors $\dfrac{n}{d_{a+1}} | m$

Démonstration

Soit $y(t)$(resp. $z(t)$) une racine de $f(t^n, y) = 0$(resp. $g(t^m, y) = 0$) tel que $c = \dfrac{1}{n.m} \mathrm{O}_t(y(t^m) - z(t^n))$. Comme

$$f(t^n, y) = \prod_{w \in U_n} (y - y(wt)),$$

il vient que

$$int(f,g) = \mathrm{O}_t f(t^m, z(t)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{O}_t(z(t) - y_i(t^{\frac{m}{n}}))$$

D'autre part,

$$\min\{\mathrm{O}_t(z(t) - y(t^{\frac{m}{n}})), \mathrm{O}_t(y(t^{\frac{m}{n}}) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}}))\} \leq \mathrm{O}_t(z(t) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}}))$$

mais d'après le lemme 1.1.1

$$\mathrm{O}_t(y(t^{\frac{m}{n}}) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) \in \{\frac{m_1 m}{n}, \ldots, \frac{m_h m}{n}\}$$

i) Si $c < \dfrac{m_1}{n}$, alors $\mathrm{O}_t(z(t) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) = c.m$ pour tout w, par conséquent

$$int(f,g) = \mathrm{O}_t f(t^m, z(t)) = \sum_{i=1}^{n} cm = n.c.m$$

ii) Si $\dfrac{m_a}{n} \leq c < \dfrac{m_{a+1}}{n}$, on a :

1) Si $\mathrm{O}_t(y(t^{\frac{m}{n}}) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) > \dfrac{m_a.m}{n}$, alors $\mathrm{O}_t(z(t) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) = c.m$, par conséquent $\mathrm{card}\{y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}}), \mathrm{O}_t(z(t) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) = c.m\} = d_{a+1}$

2) Si $\mathrm{O}_t(y(t^{\frac{m}{n}}) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) \leq \dfrac{m_a.m}{n}$, alors

$$\mathrm{O}_t(z(t) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}})) = \mathrm{O}_t(y(t^{\frac{m}{n}}) - y(w^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}}))$$

Par conséquent card$\{y(w^{\frac{m}{n}}t^{\frac{m}{n}}), \mathrm{O}_t(z(t)-y(w^{\frac{m}{n}}t^{\frac{m}{n}}))=\dfrac{m.m_l}{n}\}=d_l-d_{l+1}, l=1,\ldots,a$.

D'où

$$int(f,g)=d_{a+1}.c.m+\sum_{l=1}^{a}(d_l-d_{l+1}).\frac{m.m_l}{n}$$
$$=\frac{m}{n}(r_a d_a+(nc-m_a)d_{a+1}).$$

iii) Soit $(m'_i)_{i\leq h'}, (d'_i)_{i\leq h'}$ les suites caractéristiques associées à g. Comme $c>\dfrac{m_a}{n}$, alors chaque terme de $z(t^n)$ est annulé par un terme de $y(t^m)$ jusqu'à l'ordre $m_a.m$ inclus. Les exposants de $y(t^m)$ étant de la forme $i.m$, on en déduit que pour tout $i\in supp(y)$, $i\leq m_a$, il existe s_i tel que $s_i.n=i.m$. En particulier, pgcd$(m.m_i|i\leq a)=$ pgcd$(m'_i.n|i\leq a)$. D'où $m.d_{a+1}=n.d'_{a+1}$, d'où le résultat.

Définition 1.1.5 *Soit $1\leq a\leq h$ et soit $y_{<m_a}(t)=\sum_{j<m_a}c_jt^{\frac{j}{d_a}}$, et $\phi_a=(t^{\frac{n}{d_a}},y_{<m_a}(t))$. On appelle pseudo-racine d'ordre a de f le polynôme minimal de $y_a(x^{\frac{1}{\frac{n}{d_a}}})$ sur $\mathbf{K}((x))$.
Soit g_a ce polynôme. On a clairement $deg_y(g_a)=\dfrac{n}{d_a}$, $c(f,g_a)=\dfrac{m_a}{n}$, et $int(f,g_a)=r_a$.*

Définition 1.1.6 *L'ensemble $\Gamma(f)=\{int(f,g)|g\in\mathbf{K}[[x]][y]\}$ est un semi-groupe de $\mathbb{N}$. On appelle $\Gamma(f)$ le semi-groupe associé avec f.*

Rappelons que $\Gamma(f)$ est engendré par l'ensemble $\{r_0,r_1,\ldots,r_h\}$, en particulier, pour tout $g\in\mathbf{K}[[x]][y]$, il existe $a_0,\ldots,a_h\in\mathbb{N}$ tel que

$$int(f,g)=\sum_{i=0}^{h}a_i.r_i.$$

Rappelons aussi que si $\delta=\sum_{k=1}^{h}(\dfrac{d_k}{d_{k+1}}-1)r_k-r_0+1$, alors pour tout $a\geq\delta$, $a\in\Gamma(f)$. On appelle δ le conducteur de $\Gamma(f)$.

Définition 1.1.7 *Soit f et g deux polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$, on dit que f et g sont équisinguliers et on note $f\cong g$ si $\Gamma(f)=\Gamma(g)$.
La classe d'équisingularité d'un polynôme f de $\mathbf{K}[[x]][y]$ est donnée par l'ensemble suivant :*

$$\{g\in\mathbf{K}[[x]][y]|f\cong g\}.$$

1.2 Courbes réductibles à deux branches

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit f un polynôme de $\mathbf{K}[[x]][y]$ de degré $n>0$. Ecrivons

$$f=y^n+a_1(x)y^{n-1}+\ldots+a_n(x),$$

et soit $f = f_1.f_2$ la décomposition de f en polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit n^k le degré de $f_k, k = 1, 2$, et soit

$$y^k(t) = \sum_j c_j^k.t^j$$

une racine de $f_k(t^{n^k}, y) = 0$, on sait que les autres racines sont de la forme $y^k(w^{(k)}t)$ où $w^{(k)}$ est une racine $n^{(k)}$-ième primitive de l'unité. Soit $(m_i^k)_{0\leq i\leq h_k}, (d_i^k)_{0\leq i\leq h_k+1}, (r_i^k)_{0\leq i\leq h_k}$ les suites caractéristiques associées à $f_k, k = 1, 2$ et rappelons que :
$d_0^k = m_0^k = n^k = d_1^k, m_1^k = inf\{j \in \text{supp}(f_k) | d_1^k \text{ ne divise pas } j\}$ et pour tout $i \geq 2$

$$d_i^k = \text{pgcd}(m_{i-1}^k, d_{i-1}^k), m_i^k = inf\{j \in \text{supp}(f_k) | d_i^k \text{ ne divise pas } j\}.$$

et que $d_{h_k+1}^k = 1$. Rappelons aussi que $r_0^k = m_0^k, r_1^k = m_1^k$ et que pour tout $1 \leq i \leq h_k - 1$,

$$r_{i+1}^k = r_i^k.\frac{d_i^k}{d_{i+1}^k} + (m_{i+1}^k - m_i^k).$$

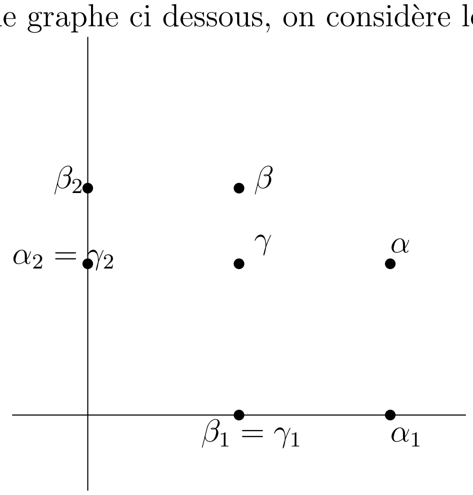
Définition 1.2.1 *Soit Γ l'ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par $\{(int(f_1, g), int(f_2, g)), g \in \mathbf{K}[[x]][y]\}$: Γ est un semi-groupe de $\mathbb{N}^2$. On le note par $\Gamma(f)$, et on l'appelle le semi-groupe de f. On note $\Gamma(f_k)$ le semi-groupe de $f_k, k = 1, 2$.*

Lemme 1.2.2 *Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \Gamma(f)$. Si $inf(\alpha, \beta) = (\min\{\alpha_1, \beta_1\}, \min\{\alpha_2, \beta_2\})$ alors $inf(\alpha, \beta) \in \Gamma(f)$.*

Démonstration Soit $g_1, g_2 \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que

$$\alpha = (int(f_1, g_1), int(f_2, g_1)) \text{ et } \beta = (int(f_1, g_2), int(f_2, g_2)).$$

Le résultat est clair si $inf(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \alpha_2)$ ou $inf(\alpha, \beta) = (\beta_1, \beta_2)$. Supposons que $inf(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_2)$ et soit $G = g_1 + \lambda.g_2, a \in \mathbf{K}^*$. Comme $int(f_1, g_1) \leq int(f_1, g_2)$ et $int(f_2, g_1) \geq int(f_2, g_2)$ alors pour un λ convenable, on a bien $int(f_1, G) = int(f_1, g_1)$ et $int(f_2, G) = int(f_2, g_2)$. En particulier, $(\alpha_1, \beta_2) = (int(f_1, G), int(f_2, G)) \in \Gamma(f)$. Le cas où $inf(\alpha, \beta) = (\beta_1, \alpha_2)$ se traite de la même manière. Dans le graphe ci dessous, on considère le cas où $\gamma = inf(\alpha, \beta) = (\beta_1, \alpha_2)$.



Lemme 1.2.3 *Soit $g, h \in \mathbf{K}[[x]][y]$. Si $int(f_1, g) = int(f_1, h)$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$, tel que $int(f_1, g + \lambda h) > int(f_1, g)$.*

Démonstration Soit $p = int(f_1, g) = \mathrm{O}_t g(t^{n^1}, y^1(t)) = \mathrm{O}_t h(t^{n^1}, y^1(t))$. En particulier $g(t^{n^1}, y^1(t)) = c.t^p + \ldots$ et $h(t^{n^1}, y^1(t)) = c't^p + \ldots$, où $c, c' \in \mathbf{K}^*$. Si $\lambda = -\dfrac{c}{c'}$ alors $\mathrm{O}_t(g + \lambda h)(t^{n^1}, y^1(t)) > p$, ce qui montre le résultat.
Le lemme précédent implique le résultat suivant :

Proposition 1.2.4 *Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \Gamma(f)$ et supposons que $\alpha_1 = \beta_1$ (resp.$\alpha_2 = \beta_2$). Il existe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma(f)$ tel que $\gamma_2 \geq \min\{\alpha_2, \beta_2\}$ et $\gamma_1 > \alpha_1 = \beta_1$ (resp.$\gamma_1 \geq \min\{\alpha_1, \beta_1\}$ et $\gamma_2 > \alpha_2 = \beta_2$).*

Démonstration Voir fig.1.

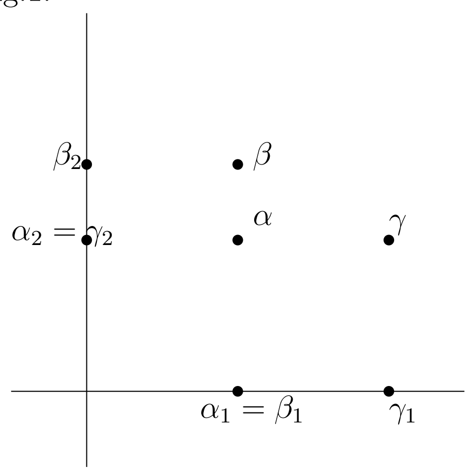


fig.1

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$. On pose

$$\bar{\Delta}_1(\alpha) = \{\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2, \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 > \alpha_2\}$$

$$\bar{\Delta}_2(\alpha) = \{\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2, \beta_2 = \alpha_2, \beta_1 > \alpha_1\}$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \bar{\Delta}_1(\alpha) \cup \bar{\Delta}_2(\alpha) = \{(\alpha_1, a), a > \alpha_2\} \cup \{(a, \alpha_2), a > \alpha_1\}$$

$$\Delta_1(\alpha) = \bar{\Delta}_1(\alpha) \cap \Gamma(f), \Delta_2(\alpha) = \bar{\Delta}_2(\alpha) \cap \Gamma(f)$$

$$\Delta(\alpha) = \bar{\Delta}(\alpha) \cap \Gamma(f).$$

Voir fig.2.

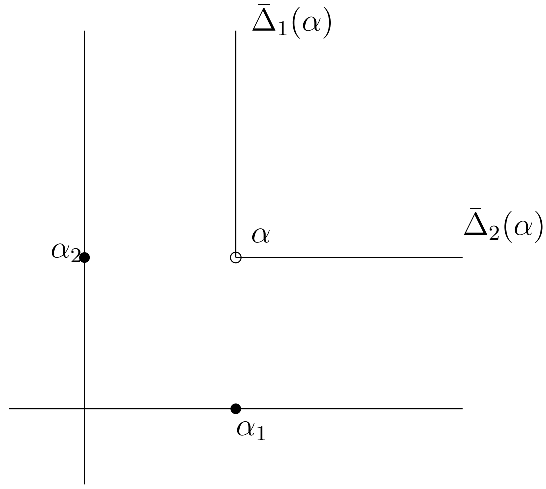


fig.2.

Définition 1.2.5 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$, on dit que α est un élément maximal de $\Gamma(f)$ si $\alpha \in \Gamma(f)$ et $\Delta(\alpha) = \emptyset$. On note $M(f)$ l'ensemble des éléments maximaux de $\Gamma(f)$.*

Notons δ_1 (resp. δ_2) le conducteur de $\Gamma(f_1)$ (resp. de $\Gamma(f_2)$). On a aussitôt le théorème suivant :

Théorème 1.2.6 *Soit $\tau = (\delta_1 + int(f_1, f_2) - 1, \delta_2 + int(f_1, f_2) - 1)$, alors on a $\tau \in M(f)$. De plus $\tau + (1,1)$ est le conducteur de $\Gamma(f)$, i.e. pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2, \tau + (a+1, b+1) \in \Gamma(f)$.*

Démonstration Voir [8].

Il résulte du théorème précédent que $M(f)$ est de cardinal fini. En effet, soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ et notons $\tau + (1,1) = (\zeta_1, \zeta_2)$. Si $\alpha_1 \geq \zeta_1$(resp. $\alpha_2 \geq \zeta_2$) alors $\Delta_1(\alpha) \neq \emptyset$ (resp. $\Delta_2(\alpha) \neq \emptyset$). En particulier, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in M(f)$ alors $\alpha_1 < \zeta_1$ et $\alpha_2 < \zeta_2$.

Définition 1.2.7 *Soit $\alpha \in M(f)$. On dit que α est irréductible si pour tout β,$\gamma \in \Gamma(f)$, $\alpha = \beta + \gamma$ implique que $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \gamma$. L'ensemble des maximaux irréductibles de $\Gamma(f)$ est noté $MI(f)$.*

Lemme 1.2.8 *Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(f)$ tel que $\alpha = \beta + \gamma$. Si $\alpha \in M(f)$ alors $\beta, \gamma \in M(f)$.*

Démonstration Supposons que $\beta \notin M(f)$, il existe $\beta' \in \Delta(\beta) = \Delta_1(\beta) \cup \Delta_2(\beta)$. En particulier $\gamma + \beta' \in \Gamma(f)$ et $\gamma + \beta' \in \bar{\Delta}(\beta + \gamma)$, donc $\gamma + \beta' \in \Delta(\beta + \gamma) = \Delta(\alpha)$. Comme α est maximal ceci est une contradiction.

Lemme 1.2.9 *Soit $MI(f) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Pour tout $\alpha \in M(f)$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i . \alpha_i.$$

Démonstration Supposons que ce résultat n'est pas vrai. En particulier $\alpha \notin MI(f)$. Il existe $\alpha_1^0, \alpha_2^0 \in \Gamma(f)$ tel que $\alpha = \alpha_1^0 + \alpha_2^0$ et $\alpha_1^0 \neq \alpha \neq \alpha_2^0$. D'après le lemme 1.2.8. $\alpha_1^0, \alpha_2^0 \in M(f)$, et d'après notre hypothèse $\alpha_1^0 \notin MI(f)$ ou $\alpha_2^0 \notin MI(f)$. Supposons que $\alpha_1^0 \notin MI(f)$ et recommençons la procédure avec α_1^0. Comme $\alpha_1^0 < \alpha$ coordonnée par coordonnée, la procédure ne peut pas continuer indéfiniment, ceci aboutit à une contradiction.

Lemme 1.2.10 *Soit $\alpha \in \Gamma(f)$. On a $\Delta_1(\alpha) \neq \emptyset$ si et seulement si $\Delta_2(\alpha) \neq \emptyset$.*

Démonstration Soit $\alpha \in \Gamma(f)$, il existe $g \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $\alpha = (int(f_1, g), int(f_2, g))$. Soit $\beta \in \Delta_1(\alpha)$, il existe $h \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $\beta = (int(f_1, h), int(f_2, h))$ et

$$int(f_1, h) = int(f_1, g) \text{ et } int(f_2, h) > int(f_2, g)$$

Soit, par le lemme 1.2.3., $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $int(f_1, g + \lambda h) > int(f_1, g)$. En particulier,

$$(int(f_1, g + \lambda h), int(f_2, g + \lambda h)) = (int(f_1, g + \lambda h), int(f_2, g)) \in \Delta_2(\alpha)$$

d'où le résultat.

Corollaire 1.2.11 *Soit $\alpha \in \Gamma(f)$. S'il existe $k \in \{1, 2\}$ tel que $\Delta_k(\alpha) = \emptyset$ alors α est un maximal de $\Gamma(f)$.*

Théorème 1.2.12 $\Gamma(f) = \{\beta \in \Gamma(f_1) \times \Gamma(f_2), \beta \notin \bar{\Delta}(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in M(f)\}$.

Démonstration $\subseteq$: Soit $\beta \in \Gamma(f)$, alors $\beta \in \Gamma(f_1) \times \Gamma(f_2)$. D'autre part si $\beta \in \bar{\Delta}(\alpha)$ avec α maximal, alors $\beta \in \bar{\Delta}(\alpha) \cap \Gamma(f) = \Delta(\alpha) = \emptyset$, ceci est une contradiction.

$\supseteq$: Soit $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \Gamma(f_1) \times \Gamma(f_2)$ et $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha)$ pour tout α maximal, et supposons que $\beta \notin \Gamma(f)$. Si $\Delta_1(\beta) \neq \emptyset$ et $\Delta_2(\beta) \neq \emptyset$, soit $\gamma^1 \in \Delta_1(\beta)$ et $\gamma^2 \in \Delta_2(\beta)$, alors par le lemme 1.2.2. $\beta = inf\{\gamma^1, \gamma^2\} \in \Gamma(f)$. Donc il existe $k \in \{1, 2\}$ tel que $\Delta_k(\beta) = \emptyset$. Supposons sans perte de généralité que $\Delta_1(\beta) = \emptyset$. Soit $g, h \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $\beta = (int(f_1, g), int(f_2, h))$ et soit $\tilde{\beta} = (int(f_1, g), int(f_2, g))$: $\tilde{\beta} \in \Gamma(f)$ et comme $\Delta_1(\beta) = \emptyset$ alors $int(f_2, g) < \beta_2$. En particulier $\{(\beta_1, a), a < \beta_2\} \cap \Gamma(f) \neq \emptyset$. Soit $\alpha = (\beta_1, a) \in \Gamma(f)$ et α est maximal avec cette propriété. En particulier $\beta \in \bar{\Delta}(\alpha)$ et $\Delta_1(\alpha) = \emptyset$, mais d'après le corollaire 1.2.11., α est un maximal ce qui est une contradiction, par conséquent $\beta \in \Gamma(f)$.

Soit c le contact de f_1 avec f_2. Soit $b \in \mathbb{N}$, $b \leq \max\{h_1, h_2\}$. Soit $g = y^m + \ldots + b_m(x)$ un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$. On dit que g a le contact maximal au niveau b avec $f_1.f_2$ si g a $b - 1$ exposants de Newton-Puiseux et si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) $c(f_1, g) = c(f_2, g) = \dfrac{m_b^1}{n^1} = \dfrac{m_b^2}{n^2} < c$ et $\deg_y g = \dfrac{n^1}{d_b^1} = \dfrac{n^2}{d_b^2}$.

ii) $c(f_1, g) = \dfrac{m_b^1}{n^1} > c$ et $\deg_y g = \dfrac{n^1}{d_b^1}$.

iii) $c(f_2, g) = \dfrac{m_b^2}{n^2} > c$ et $\deg_y g = \dfrac{n^2}{d_b^2}$.

On note $\mathbf{C}^b$ l'ensemble de ces éléments et remarquons que ces éléments sont des pseudo-racines de f_1 ou f_2.

Définition 1.2.13 *Soit $b \in \mathbb{N}$, et soit $V^b(f) = \{(int(f_1, g), int(f_2, g)), g \in \mathbf{C}^b\}$. On note*

$$V(f) = \bigcup_{b \geq 1} V^b(f)$$

et on rappelle que si $b > \max\{h_1, h_2\}$ alors $V^b(f) = \emptyset$.

On a aussitôt le théorème suivant :

Théorème 1.2.14 *$V(f) = MI(f)$.*

On commence par donner quelques lemmes préliminaires. Soit $g = y^m + \ldots + b_m(x)$ un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$, et soit $c_k = c(f_k, g), k = 1, 2$.

Lemme 1.2.15 *Si $c_1 < c$, alors $int(f_2, g) = \dfrac{n^2}{n^1} int(f_1, g)$.*

Démonstration Si $c_1 < c$, alors $c_2 = c_1$, soit $(m'_i)_{0 \leq i \leq h'}, (d'_i)_{0 \leq i \leq h'+1}, (r'_i)_{0 \leq i \leq h'}$ les suites caractéristiques associées avec g.

◇ Si $c_1 < \dfrac{m'_1}{m}$ alors $int(f_2, g) = m.c_2.n^2$ et $int(f_1, g) = m.c_1.n^1$ d'où le résultat.

◇ Sinon soit a' l'unique entier tel que $\dfrac{m'_{a'}}{m} \leq c_1 < \dfrac{m'_{a'+1}}{m}$. On a

$$int(f_1, g) = \frac{n^1}{m}(r'_{a'}.d'_{a'} + (mc_1 - m'_{a'}).d'_{a'+1})$$

et

$$int(f_2, g) = \frac{n^2}{m}(r'_{a'}.d'_{a'} + (mc_2 - m'_{a'}).d'_{a'+1}).$$

D'où le résultat.

Lemme 1.2.16 *Si $c_1 > c$, alors $int(f_2, g) = \dfrac{m}{n^1}.int(f_1, f_2)$.*

Démonstration Si $c_1 > c$, alors $c_2 = c$.

◇ Si $c < \dfrac{m_1^2}{n^2}$ alors $int(f_2, g) = m.n^2.c_2$, d'autre part $int(f_1, f_2) = n^1.c.n^2 = n^1.c_2.n^2$ d'où le résultat.

◇ Sinon, soit a l'unique entier tel que $\dfrac{m_a^2}{n^2} \leq c < \dfrac{m_{a+1}^2}{n^2}$, donc

$$int(f_2, g) = \frac{m}{n^2}(r_a^2.d_a^2 + (n^2.c - m_a^2).d_{a+1}^2)$$

mais

$$int(f_2, f_1) = \frac{n^1}{n^2}(r_a^2.d_a^2 + (n^2.c - m_a^2).d_{a+1}^2)$$

d'où le résultat.

Lemme 1.2.17 *Si $c_1 = c$, alors $int(f_1, g) = \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2)$.*

Démonstration Comme $c_1 = c$, alors $c_2 \geq c$. Si $c_2 > c$, le résultat est similaire au lemme 1.2.16. Supposons que $c_1 = c = c_2$:

◇ Si $c < \frac{m_1^1}{n^1}$ alors $int(f_1, g) = n^1.c.m$ mais $int(f_1, f_2) = n^1.c.n^2$, d'où le résultat.

◇ Sinon soit a l'unique entier tel que $\frac{m_a^1}{n^1} \leq c < \frac{m_{a+1}^1}{n^1}$, donc

$$int(f_1, g) = \frac{m}{n^1}(r_a^1.d_a^1 + (n^1.c - m_a^1).d_{a+1}^1)$$

d'autre part

$$int(f_2, f_1) = \frac{n^2}{n^1}(r_a^1.d_a^1 + (n^1.c - m_a^1).d_{a+1}^1)$$

d'où le résultat.

Remarque 1.2.18 *Soit $S = \{\frac{int(f_1, g)}{n^1.m}, \frac{int(f_2, g)}{n^2.m}, \frac{int(f_1, f_2)}{n^1.n^2}\}$. D'après les lemmes précédents, deux éléments de S sont égaux, et le troisième est plus grand ou égal à la valeur commune de ces deux éléments.*

Démonstration du théorème 1.2.14 Démontrons que $V(f) \subseteq MAI(f)$: soit $\alpha \in V(f)$ il existe b tel que $\alpha \in V^b(f)$. Il existe $g \in \mathbf{C}^b$ tel que $int(f, g) = \alpha$. Supposons sans perte de généralité que $c(f_1, g) \geq c(f_2, g)$.

◇ Si $c(f_1, g) < c$ alors $c(f_1, g) = c(f_2, g)$ et dans ce cas $\alpha = (r_b^1, r_b^2)$ est un maximal irréductible de $\Gamma(f)$

◇ Si $c(f_1, g) \geq c$ alors $\alpha = (r_b^1, \frac{int(f_1, f_2)}{d_b^1})$ est un maximal irréductible de $\Gamma(f)$.

Pour démontrer que $MAI(f) \subseteq V(f)$: soit α un maximal irréductible de $\Gamma(f)$, il existe $g \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $\alpha = int(f, g)$. Soit m le degré de g en y, notons $c_k = c(f_k, g), k = 1, 2$ et supposons sans perte de généralités que $c_1 \geq c_2$:

◇ Si $c_1 < c$ alors $c_2 = c_1$ et $int(f_2, g) = \frac{n^2}{n^1}.int(f_1, g)$. Ecrivons

$$int(f_1, g) = \sum_i \lambda_i.r_i^1$$

comme α est irréductible il existe alors b tel que $\alpha_1 = r_b^1$ dans ce cas $\alpha = (r_b^1, r_b^2) \in V^b(f)$.

◇ Si $c_1 \geq c$ alors $c_2 = c$ et $int(f_2, g) = \frac{m}{n^1}.int(f_1, f_2)$. Comme α est maximal irréductible alors il existe b tel que $\alpha_1 = r_b^1$. En effet, soit $b \leq h_1$ tel que $\frac{m_b^1}{n^1} \leq c_1 < \frac{m_{b+1}^1}{n^1}$. Si $c_1 > \frac{m_b^1}{n^1}$ alors il existe g' tel que $int(f, g') \in \Delta_2(\alpha)$, ce qui est une contradiction, et d'après l'irréductibilité de α on a $\frac{m}{n^1}.d_b^1 = 1$. En particulier $\alpha = (r_b^1, \frac{int(f_1, f_2)}{d_b^1}) \in V^b(f)$. D'où le résultat.

Le théorème précédent peut être précisé de la manière suivante :

Proposition 1.2.19 *i) Si* $c < \dfrac{m_1^1}{n^1}$ *ou* $\dfrac{m_1^2}{n^2}$ *alors*

$$MI(f) = \{(r_a^1, \frac{int((f_1,f_2)}{d_a^1})|a \leq h_1, (\frac{int((f_1,f_2)}{d_a^2}, r_a^2)|a \leq h_2.\}$$

ii) Sinon, soit q *le plus grand entier tel que* $\dfrac{m_q^1}{n^1} = \dfrac{m_q^2}{n^2} < c$ *et on pose pour* $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \dfrac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

$$Alors\ MI(f) = \{(r_a^1, r_a^2)|a \leq q, (r_a^1, \frac{int((f_1,f_2)}{d_a^1})|L_1 < a \leq h_1, (\frac{int((f_1,f_2)}{d_a^2}, r_a^2)|L_2 < a \leq h_2.\}$$

Exemple 1.2.20 *Soit* $f = f_1.f_2 = (y^2 - x^3)((y^2 - x^3)^2 - x^5y)$. *Les suites caractéristiques associées à* f_1 *et* f_2 *sont respectivement :*
$m_0^1 = r_0^1 = 2 = d_0^1 = d_1^1$, $m_1^1 = r_1^1 = 3$ *et* $d_2^1 = 1$, $m_0^2 = r_0^2 = 4 = d_0^2 = d_1^2$, $m_1^2 = 6 = r_1^2$, $d_2^2 = 2$, $m_2^2 = 7$, $d_3^2 = 1$ *et* $r_2^2 = 13$. *Dans ce cas* $c(f_1, f_2) = \dfrac{7}{4}$ *et* $q = 1$. *En particulier* $MI(f) = \{(2,4),(3,6)\}$.

1.3 Courbes réductibles à plusieurs branches

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit f un polynôme de $\mathbf{K}[[x]][y]$ de degré $n > 0$. Ecrivons

$$f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x).$$

et soit

$$f = \prod_{k=1}^{s} f_k$$

la décomposition de f en polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit n^k le degré de $f_k, k = 1, \ldots, s$, et soit

$$y^k(t) = \sum_j c_j^k.t^j$$

une racine de $f_k(t^{n^k}, y) = 0$, et rappelons que les autres racines sont de la forme $y^k(w^{(k)}t)$ où $w^{(k)}$ est une racine primitive $n^{(k)}$-ième de l'unité. Soit $(m_i^k)_{0 \leq i \leq h_k}, (d_i^k)_{0 \leq i \leq h_k+1}, (r_i^k)_{0 \leq i \leq h_k}$ les suites caractéristiques associées à f_k et rappelons que :
$d_0^k = m_0^k = n^k = d_1^k, m_1^k = inf\{j \in \mathrm{supp}(f_k)|d_1^k$ ne divise pas $j\}$ et pour tout $i \geq 2$

$$d_i^k = pgcd(m_{i-1}^k, d_{i-1}^k), m_i^k = inf\{j \in \mathrm{supp}(f_k)|d_i^k \text{ ne divise pas } j\}$$

et que $d^k_{h_k+1} = 1$. Rappelons aussi que $r^k_0 = m^k_0, r^k_1 = m^k_1$ et pour tout $1 \leq i \leq h_k - 1$,

$$r^k_{i+1} = r^k_i . \frac{d^k_i}{d^k_{i+1}} + (m^k_{i+1} - m^k_i).$$

Définition 1.3.1 *Soit G et g deux polynômes de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soient*

$$G = \prod_{i=1}^{s} G_i \text{ et } g = \prod_{j=1}^{r} g_j$$

les décompositions de G et g en polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$. On dit que G et g sont équisinguliers si
i) $s = r$.
ii) Pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe $j_i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que G_i et g_{j_i} sont équisinguliers.
iii) Pour tout $1 \leq i \neq j \leq r$, $c(G_i, G_k) = c(g_{j_i}, g_{j_k})$.

La classe d'équisingularité d'un polynôme $g \in \mathbf{K}[[x]][y]$ est définie par :

$$\{G \in \mathbf{K}[[x]][y] |\ G \text{ et } g \text{ sont équisinguliers } \}.$$

1.3.1 L'arbre des contacts

Dans cette section, on introduit l'arbre des contacts de f (voir [3]) et on étudie certaines de ses propriétés. Les notations sont celles de 1.3. Soit :

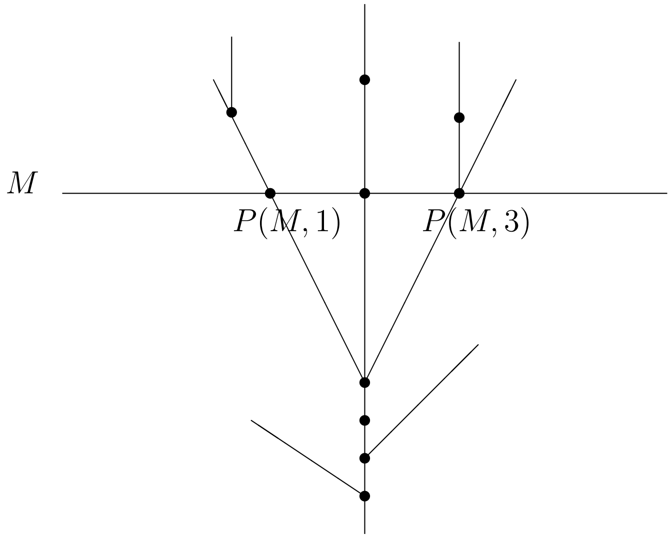
$$C(f) = \{c(f_k, f_j), 1 \leq k \neq j \leq s\} \cup \{(\frac{m^k_i}{n^k})_{1 \leq i \leq h_k}, k = 1 \ldots, s\}$$

A un élément $M \in C(f)$, on associe la relation d'équivalence R_M suivante :

$$f_k R_M f_j \quad \text{si et seulement si} \quad c(f_j, f_k) \geq M$$

On définit les points de l'arbre de f au niveau M par l'ensemble des classes d'équivalence de R_M. Soit $P(M, 1), \ldots, P(M, r)$ l'ensemble de ces classes.

Définition 1.3.2 *L'arbre des contacts de f, noté $T(f)$, est l'ensemble des classes d'équivalence de R_M, $M \in C(f)$.*



Soit $g = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \ldots + b_m(x)$ un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ et considérons l'arbre des contacts de $f.g$.
Soit $M = max\{c(f_j, g)|1 \leq j \leq s\}$, et soit $l \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $M = c(f_l, g)$. On pose $Q(M)$ la classe d'équivalence de R_M contenant f_l. Notons que si $f_p \in Q(M)$ alors $c(f_p, f_l) \geq M$ et $c(f_p, g) = M$.
Soit $c = min\{c(f_k, f_j)|1 \leq j \neq k \leq s\}$. Soit $(m'_i)_{0\leq i\leq h'}, (d'_i)_{0\leq i\leq h'+1}, (r'_i)_{0\leq i\leq h'}$ les exposants caractéristiques de g. Avec ces notations on a les propositions suivantes :

Proposition 1.3.3 *Si $M \leq c$, alors $int(f_k, g) = \dfrac{n^k}{n^j} int(f_j, g)$, $1 \leq j \neq k \leq s$.*

Démonstration Puisque $M \leq c$, alors $M \leq c(f_l, f_j)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$. Par conséquent, $c(f_j, g) = M, j = 1, \ldots, s$.

$\diamond$ Si $M < \dfrac{m'_1}{m}$ alors par la prop. 1.1.4.i),

$$int(f_k, g) = n^k.M.m$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, s\}$.

$\diamond$ Sinon, soit a' l'unique entier tel que $\dfrac{m'_{a'}}{m} \leq M < \dfrac{m'_{a'+1}}{m}$. Alors par la prop. 1.1.4.ii)

$$int(f_k, g) = \frac{n^k}{m}(r'_a.d'_a + (m.M - m'_a).d'_{a+1}), k = 1 \ldots, s.$$

Par conséquent on a $int(f_k, g) = \dfrac{n^k}{n^j} int(f_j, g)$, $1 \leq j \neq k \leq s$.

Proposition 1.3.4 *Si $M > c$, alors :*
i) Pour $f_k \in Q(M)$, $int(f_k, g) = \dfrac{n^k}{n^l} int(f_l, g)$.
ii) Pour $f_k \notin Q(M)$, $int(f_k, g) = \dfrac{m}{n^l}.int(f_k, f_l)$.

Démonstration i) Soit $f_k \in Q(M)$, et rappelons que $M = c(f_l, g) = max\{c(f_j, g) | 1 \leq j \leq s\}$. En particulier $c(f_k, g) = M$.

⋄ Si $M < \frac{m'_1}{m}$ alors $int(f_k, g) = n^k.m.M$, mais $int(f_l, g) = n^l.M.m$, d'où le résultat.

⋄ Sinon soit a' l'unique entier tel que $\frac{m'_{a'}}{m} \leq M < \frac{m'_{a'+1}}{m}$. Alors

$$int(f_k, g) = \frac{n^k}{m}(r'_{a'}.d'_{a'} + (m.M - m'_{a'}).d'_{a'+1})$$

Mais

$$int(f_l, g) = \frac{n^l}{m}(r'_{a'}.d'_{a'} + (m.M - m'_{a'}).d'_{a'+1})$$

par conséquent, $int(f_k, g) = \frac{n^k}{n^l}.int(f_l, g)$.

ii) Soit $f_k \notin Q(M)$, en particulier $c(f_k, g) = c(f_k, f_l)$.

⋄ Si $M < \frac{m'_1}{m}$ alors $int(f_k, g) = n^k.m.M$ mais $int(f_k, f_l) = n^k.n^l.M$, d'où le résultat.

⋄ Sinon soit a l'unique entier tel que $\frac{m^k_a}{n^k} \leq c(f_k, f_l) < \frac{m^k_{a+1}}{n^k}$, alors

$$int(f_k, g) = \frac{m}{n^k}.(r^k_a.d^k_a + (n^k c(f_k, f_l) - m^k_a)d^k_{a+1}).$$

D'autre part,

$$int(f_k, f_l) = \frac{n^l}{n^k}.(r^k_a.d^k_a + (n^k c(f_k, f_l) - m^k_a)d^k_{a+1}).$$

En particulier $int(f_k, g) = \frac{m}{n^l}.int(f_k, f_l)$.

Définition 1.3.5 *Soit* $\Gamma(f) = \{(int(f_1, g), \ldots, int(f_s, g)) | g \in \mathbf{K}[[x]][y]\}$, $\Gamma(f)$ *est un semi-groupe de* $\mathbb{N}^s$, *on l'appelle le semi-groupe de* f.

Dans la suite, on se propose d'étudier les générateurs de $\Gamma(f)$(voir [8]) utilisant les résultats de 1.3.1.

1.3.2 Les générateurs de $\Gamma(f)$

Les notations sont celles de 1.3, soit $I = \{1, \ldots, s\}$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathbb{N}^s$, on définit l'ordre partiel suivant :

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } i \in I$$

Lemme 1.3.6 *Soit* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \Gamma(f)$. *Si*

$$inf(\alpha, \beta) = (\min\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \min\{\alpha_s, \beta_s\})$$

alors $inf(\alpha, \beta) \in \Gamma(f)$.

Démonstration La démonstration est similaire au cas $s = 2$. (voir lemme 1.2.2.).

Lemme 1.3.7 *Soit $g, h \in \mathbf{K}[[x]][y]$. Si $int(f_i, g) = int(f_i, h), i \in I$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$, tel que $int(f_i, g + \lambda.h) > int(f_i, g) = int(f_i, h)$.*

Démonstration Voir lemme 1.2.3.

Le lemme précédent implique la proposition suivante :

Proposition 1.3.8 *Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \Gamma(f)$ et soit $i \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\alpha_i = \beta_i$. Il existe $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in \Gamma(f)$ tel que $\gamma_k \geq \min\{\alpha_k, \beta_k\}$ pour tout $k \in I$ et $\gamma_i > \alpha_i = \beta_i$.*

Démonstration Soit $g, h \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $int(f, g) = \alpha$ et que $int(f, h) = \beta$. Comme $\alpha_i = \beta_i$ alors $int(f_i, g) = int(f_i, h)$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $int(f_i, g + \lambda.h) > int(f_i, g)$. En particulier $int(f, g + \lambda.h) = \gamma$ vérifie les conditions de la proposition.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^s$ et $J \subset I$, on définit les ensembles suivants :

$$\bar{\Delta}_J(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{N}^s | \beta_i = \alpha_i \forall i \in J; \beta_k > \alpha_k, \forall k \notin J\}$$

Si $J = \{i\}$, on note $\bar{\Delta}_{\{i\}}(\alpha) = \bar{\Delta}_i(\alpha)$.

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \cup_1^s \bar{\Delta}_i(\alpha), \Delta_J(\alpha) = \bar{\Delta}_J(\alpha) \cap \Gamma(f)$$

$$\Delta(\alpha) = \bar{\Delta}(\alpha) \cap \Gamma(f).$$

On pose finalement :

$$pr_J : \mathbb{N}^s \to \mathbb{N}^{\sharp J}$$

la projection définie par $pr_J(\alpha) = (\alpha_i)_{i \in J}$.
Soit $\Gamma_J(f) = pr_J(\Gamma(f)) = \{pr_J(\alpha) | \alpha \in \Gamma(f)\}$, et $\Gamma^J(f) = pr_{I-J}(\Gamma(f))$.

Définition 1.3.9 *i) Un élément $\alpha \in \Gamma(f)$ est dit maximal de $\Gamma(f)$ si $\Delta(\alpha) = \emptyset$.*
ii) Si α est maximal de $\Gamma(f)$ et si $\Delta_J(\alpha) = \emptyset$ pour tout $J \subset I, J \neq I$, alors α est dit maximal absolu de $\Gamma(f)$.
iii) Si α est maximal de $\Gamma(f)$ et si $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$ pour tout $J \subset I$ de cardinal au moins deux alors α est dit maximal relatif de $\Gamma(f)$.

On note $M(f)$ (resp. $MA(f)$, resp. $MR(f)$) l'ensemble des maximaux (resp. des maximaux absolus, resp. des maximaux relatifs) de $\Gamma(f)$.

Lemme 1.3.10 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^s$ vérifiant les conditions suivantes :*
i) Il existe $i \in I$ tel que $\Delta_i(\alpha) = \emptyset$.
ii) $\Delta_{i,j}(\alpha) \neq \emptyset$ pour tout $j \neq i$. Alors α est un maximal relatif de $\Gamma(f)$.

Démonstration $\diamond$ Soit $\alpha^j \in \Delta_{i,j}, j \in I, j \neq i$. On a $\alpha = inf\{\alpha^j, j \neq i\}$, ce qui implique par le lemme 1.3.6.que $\alpha \in \Gamma(f)$.

$\diamond$ Supposons qu'il existe $k \neq i$ tel que $\Delta_k(\alpha) \neq \emptyset$, et soit $\gamma \in \Delta_k(\alpha)$. On a $pr_k(\alpha^k) = pr_k(\gamma) = \alpha_k$, alors d'après la prop.1.3.8. il existe $\beta \in \Gamma(f)$ tel que $\beta_k > \alpha_k, \beta_i = \alpha_i$, et $\beta_j \geq \min\{\gamma_j, \alpha_j^k\} > \alpha_j$, par conséquent $\beta \in \Delta_i(\alpha)$ mais ceci contredit i), donc, $\Delta_k(\alpha) = \emptyset$ pour tout $k \in I$, ainsi α est maximal.

$\diamond$ Soit $k, l \in I, k, l \neq i$, on a $pr_i(\alpha^k) = pr_i(\alpha^l) = \alpha_i$, alors d'après la prop.1.3.8. il existe $\beta \in \Gamma(f)$ tel que $\beta \in \Delta_{k,l}(\alpha)$. Si $J \subset I$ est de cardinal au moins deux, on pose $J = J_1 \cup .. \cup J_t$, avec J_i de cardinal 2, et soit $\gamma^i \in \Delta_{J_i}(\alpha)$. On pose $\gamma = inf\{\gamma^1, \ldots, \gamma^t\}$, par conséquent $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$, ce qui implique que α est un maximal relatif de $\Gamma(f)$.

Théorème 1.3.11 *Soit $\beta \in \mathbb{N}^s$ tel que $pr_J(\beta) \in \Gamma_J(f)$ pour tout $J \subset I$ de cardinal $s-1$. Alors $\beta \in \Gamma(f)$ si et seulement si $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha)$, pour tout $\alpha \in MR(f)$.*

Démonstration Démontrons que la condition est nécessaire : soit $\beta \in \Gamma(f)$, si en plus $\beta \in \bar{\Delta}(\alpha)$ alors $\beta \in \Delta(\alpha) = \emptyset$ pour $\alpha \in MR(f)$.
Pour démontrer que la condition est suffisante, soit

$$\Delta_i^j(\alpha) = \{\gamma \in \Gamma(f) | \gamma_i = \alpha_i, \gamma_r \geq \alpha_r \quad \forall r \leq j \text{ et } \gamma_d > \alpha_d \text{ pour } d > j, d \neq i\}.$$

Soit $\beta \in \mathbb{N}^s$ vérifiant $pr_J(\beta) \in \Gamma_J(f)$ pour tout $J \subset I$ de cardinal $s-1$, et $\beta \notin \bar{\Delta}(\alpha)$, pour $\alpha \in RM(f)$, supposons que $\beta \notin \Gamma(f)$. Si pour tout $j \in I$ il existe $\gamma^j \in \Delta_j^s(\beta)$, alors $\beta = inf\{\gamma^j, j \in I\} \in \Gamma(f)$. D'où il existe $j \in I$ tel que $\Delta_j^s(\beta) = \emptyset$. Supposons sans perte de généralité que $j = 1$, et soit $i \geq 1$ le plus petit entier pour lequel il existe $\beta_{i+1}^*, \ldots, \beta_s^* \in \mathbb{N}$, et $\gamma^{i+1}, \ldots, \gamma^s \in \Gamma(f)$ tel que si on pose $\beta^{i+1} = (\beta_1, ..\beta_i, \beta_{i+1}^*, ..\beta_s^*) \in \mathbb{N}^s$, et $\Delta_{1,k}^i(\beta^{i+1}) = \Delta_k^i(\beta^{i+1}) \cap \Delta_1^s(\beta^{i+1})$, on a :

i) $\beta_k^* < \beta_k$ et $\gamma^k \in \Delta_{1,k}^i(\beta^{i+1}), k = i+1, .., s$

ii) $\Delta_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$.

Supposons $i > 1$. Soit $\beta_0^{i+1} = (\beta_1, ..\beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}^*, ..\beta_s^*)$, mais $(\beta_1, ..\beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..\beta_s) \in \Gamma^i(f)$, alors $(\beta_1, ..\beta_{i-1}, b, \beta_{i+1}, ..\beta_s) \in \Gamma(f)$ pour un certain b tel que $b < \beta_i$ (puisqu'on a $\Delta_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$) par conséquent $\Delta_1^i(\beta_0^{i+1}) \neq \emptyset$. On pose $\beta_i^* = \max\{pr_i(\alpha) | \alpha \in \Delta_1^i(\beta_0^{i+1})\}$, et soit $\gamma^i \in \Delta_1^i(\beta_0^{i+1})$ tel que $pr_i(\gamma^i) = \beta_i^*$. Considérons $\beta^i = (\beta_1, ..\beta_{i-1}, \beta_i^*, ..\beta_s^*) \in \mathbb{N}^s$. Comme $\gamma^k \in \Delta_{1,k}^i(\beta^{i+1})$, et $\beta_i^* < \beta_i$, alors $\gamma^k \in \Delta_{1,k}^{i-1}(\beta^i)$. Cette construction aboutit à une contradiction avec la minimalité de i, par conséquent $i = 1$.
D'autre part $\beta^* = (\beta_1, \beta_2^*, \ldots, \beta_s^*) \in \mathbb{N}^s$ où $\beta_i^* < \beta_i$ pour tout $i \geq 2$ alors $\beta \in \bar{\Delta}_1(\beta^*)$. En plus $\Delta_1(\beta^*) = \emptyset$ et $\Delta_{1,i}(\beta^*) \neq \emptyset, i \geq 2$ donc par le lemme 1.3.10, β^* est un maximal relatif de $\Gamma(f)$, ce qui est une contradiction.

Remarque 1.3.12 *Avec les mêmes notations du théorème précédent, il suffit d'avoir l'ensemble $MR(f)$ et les éléments de $\Gamma_J(f)$, pour J de cardinal $s-1$ pour trouver les éléments de $\Gamma(f)$. Notons que dans le cas où $I = \{1, 2\}$, $M(f) = MR(f) = MA(f)$ et rappelons que dans ce cas, $M(f), \Gamma(f_1), \Gamma(f_2)$ déterminent $\Gamma(f_1.f_2)$.*

Dans la suite on se propose de décrire l'ensemble $MR(f)$.

1.3.3 La symétrie de l'ensemble des maximaux

Notons δ_i le conducteur de $\Gamma(f_i), i = 1, \ldots, s$ (i.e δ_i est le plus petit élément du semi-groupe tel que pour tout $a \geq \delta_i$ $a \in \Gamma(f_i)$) et soit $\xi^i = \sum_{j \neq i} int(f_j, f_i)$. Avec ces notations on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.13 *Soit* $\tau = (\delta_1 + \xi^1 - 1, \delta_2 + \xi^2 - 1, \ldots, \delta_s + \xi^s - 1)$. *On a* $\tau \in \Gamma(f)$, τ *est un maximal relatif. De plus* $\tau + (1, \ldots, 1)$ *est le conducteur de* $\Gamma(f)$*(autrement dit* $\tau + (1, \ldots, 1) + \mathbb{N}^s \subset \Gamma(f)$*).*

Démonstration Voir [8].

Théorème 1.3.14 *1) Soit* $\alpha \in \Gamma(f)$. *Alors* α *est un maximal de* $\Gamma(f)$ *si et seulement si* $\alpha' = \tau - \alpha \in \Gamma(f)$.

2) Si $\alpha, \beta \in \Gamma(f)$ *sont tel que* $\alpha + \beta = \tau$, *alors* $\beta \in MA(f)$ *si et seulement si* $\alpha \in MR(f)$. *En particulier, la donnée de* τ *et de* $MA(f)$ *déterminent* $MR(f)$.

Démonstration Voir [8].

Dans ce qui suit, on décrit le calcul fait pour trouver l'ensemble des maximaux absolus de $\Gamma(f)$ à l'aide de l'arbre des contacts de 1.3.1.

1.3.4 La description du semi-groupe à l'aide de l'arbre des contacts

Soit $b \in \mathbb{N}$, $b \leq \max\{h_j, 1 \leq j \leq s\}$. Soit $g = y^m + b_1(x).y^{m-1} + \ldots + b_m(x)$ un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit $M = \max\{c(f_j, g), 1 \leq j \leq s\}$, et soit $l \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c(f_l, g) = M$. On dit que g a le contact maximal au niveau b avec f si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} g \text{ a } b-1 \text{ exposants de Newton-Puiseux} \\ \max\{c(f_j, g), 1 \leq j \leq s\} = c(f_l, g) = \dfrac{m_b^l}{n^l} \\ \deg_y g = \dfrac{n^l}{d_b^l} \end{cases}$$

On note $\mathbf{C}^b$ l'ensemble de ces éléments et on remarque que ces éléments sont des pseudo-racines de f_l.

Soit $T(f)$ l'arbre des contacts de f et reprenons les notations de 1.3.1.

Proposition 1.3.15 *Soit* $b \in \mathbb{N}$, $g \in \mathbf{C}^b$. *Alors*

$$\begin{cases} int(f_j, g) = r_b^j & si\ f_j \in Q(M) \\ int(f_j, g) = \dfrac{int(f_l, f_j)}{d_b^l} & si\ f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Démonstration Voir prop.1.3.4.

Définition 1.3.16 *Soit $b \in \mathbb{N}$, et soit $V^b(f) = \{(int(f_1, g), \ldots, int(f_s, g)) | g \in \mathbf{C}^b\} \subseteq \mathbb{N}^s$. On note*

$$V(f) = \bigcup_{b \geq 1} V^b(f).$$

Dans la suite, on introduit la notion de maximal absolu irréductible.

Définition 1.3.17 *Soit $\alpha \in MA(f)$. On dit que α est irréductible si pour tout β,$\gamma \in \Gamma(f)$, $\alpha = \beta + \gamma$ implique que $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \gamma$. L'ensemble des maximaux absolus irréductibles de $\Gamma(f)$ est noté $MAI(f)$.*

Lemme 1.3.18 *Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(f)$ tel que $\alpha = \beta + \gamma$. Si $\alpha \in MA(f)$ alors $\beta, \gamma \in MA(f)$.*

Démonstration $\diamond$ Supposons que $\beta \notin M(f)$, il existe $\beta' \in \Delta(\beta) = \bigcup_i \Delta_i(\beta)$. En particulier $\gamma + \beta' \in \Gamma(f)$ et $\gamma + \beta' \in \bar{\Delta}(\beta + \gamma)$, donc $\gamma + \beta' \in \Delta(\beta + \gamma) = \Delta(\alpha)$. Comme α est maximal, ceci aboutit à une contradiction.

$\diamond$ Supposons que $\beta \notin MA(f)$ alors, il existe J tel que $\beta' \in \Delta_J(\beta)$. En particulier $\gamma + \beta' \in \bar{\Delta}_J(\beta + \gamma)$, donc $\gamma + \beta' \in \Delta_J(\alpha)$. Ceci aboutit à une contradiction.

Lemme 1.3.19 *Soit $MAI(f) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Pour tout $\alpha \in MA(f)$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i . \alpha_i.$$

Démonstration Supposons que ce résultat n'est pas vrai. En particulier $\alpha \notin MAI(f)$. Il existe $\alpha_1^0, \alpha_2^0 \in \Gamma(f)$ tel que $\alpha = \alpha_1^0 + \alpha_2^0$ et $\alpha_1^0 \neq \alpha \neq \alpha_2^0$. D'après le lemme 1.3.18. $\alpha_1^0, \alpha_2^0 \in MA(f)$, et d'après notre hypothèse $\alpha_1^0 \notin MAI(f)$ ou $\alpha_2^0 \notin MAI(f)$. Supposons que $\alpha_1^0 \notin MAI(f)$ et recommençons la procédure avec α_1^0. Comme $\alpha_1^0 < \alpha$ coordonnée par coordonnée, la procédure ne peut pas continuer indéfiniment, ceci aboutit à une contradiction.

Remarque 1.3.20 *D'après les théorèmes 1.3.11. et 1.3.14. le calcul du semi-groupe est réduit au calcul de l'ensemble des maximaux absolus irréductibles et aux semi-groupes de $\dfrac{f}{f_i}, i = 1, \ldots, s$.*

Proposition 1.3.21 *Si $\alpha \in V(f)$, alors $\alpha \in MAI(f)$.*

Démonstration Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in V^b(f)$. On pose $E(\alpha) = \{1 \leq i \leq s, \alpha_i = r_b^i\}$, soit $h \in \mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $int(f_i, h) = r_b^i$ pour tout $i \in E(\alpha)$. Soit $l \in E(\alpha)$ tel que $c(f_l, h) \geq c(f_i, h)$ pour tout $i \neq l$. En particulier $\Delta_l^s(\alpha) = \{\alpha\}$.
Supposons qu'il existe $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, tel que $\Delta_J(\alpha) \neq \emptyset$, et soit $\beta \in \Delta_J(\alpha)$. Puisque $\Delta_l^s(\alpha) = \{\alpha\}$ alors $l \notin J$. En particulier, $\beta_j = \alpha_j$ pour tout $j \in J$ et $\beta_l > \alpha_l$. D'après la prop. 1.3.8. il existe $\gamma \in \Gamma(f)$ tel que $\gamma_j > \alpha_j$ et $\gamma_l = \alpha_l$, par conséquent $\gamma \in \Delta_l^s(\alpha)$, d'où la contradiction. On en déduit que α est un maximal absolu, l'irréductibilité provient de celle de r_b^i dans $\Gamma(f_i)$.

Soit $\alpha \in \Gamma(f)$ un maximal absolu irréductible, et soit $h \in \mathbf{K}[[x]][y]$ un polynôme non nul tel que $\alpha = int(f,h)$, α étant un maximal absolu irréductible, on en déduit que h est irréductible. Soit $l \in \{1,\ldots,s\}$ tel que $c(h,f_l) \geq c(h,f_i), i \neq l$, soit $c = \min\{c(f_i,f_j) | 1 \leq i \neq j \leq s\}$. Avec ces notations on a :

Proposition 1.3.22 *S'il existe $q \geq 0$ tel que $\dfrac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \dfrac{m_q^s}{n^s} < c$ et si $c(h,f_l) \leq c$, alors $\alpha = (r_a^1,\ldots,r_a^s)$ où $a \leq q$.*

Démonstration On a $c(h,f_i) = c(h,f_l)$ pour tout $i \neq l$ et le résultat est une conséquence de la proposition 1.3.3. Remarquons que si $q = 0$ et $\deg_y(h) = m > 0$ alors $int(f_k,h) = n^k.m.c(f_k,h) = n^k.m.c(f_l,h)$ pour tout $k \in \{1,\ldots,s\}$. Comme $(r_0^1,\ldots,r_0^s) = (n^1,\ldots,n^s) \in \Gamma(f)$, ceci montre que $\alpha = (n^1,\ldots,n^s)$.

Lemme 1.3.23 *Si $c(h,f_l) > c$ alors il existe $b \leq h_l$ tel que $int(h,f_l) = r_b^l$.*

Démonstration Soit $deg_y(h) = m$ et soit $b \leq h_l$ tel que $\dfrac{m_b^l}{n^l} \leq c < \dfrac{m_{b+1}^l}{n^l}$. Si $\dfrac{m_b^l}{n^l} < c(f_l,h)$ alors $int(f_l,h) = \dfrac{m}{n^l}.[r_b^l d_b^l + (n^l c(f_l,h) - m_b^l)d_{b+1}^l] < \dfrac{m}{n^l}.d_{b+1}^l.r_{b+1}^l$. Sous ces conditions on a

$$int(f_i,h) = \begin{cases} \dfrac{m.int(f_l,f_i)}{n^l} & \text{si } c(h,f_i) < c(h,f_l) \\ \dfrac{n^i}{n^l} int(f_l,h) & \text{si } c(h,f_i) = c(h,f_l) \end{cases}$$

Soit $h' \in \mathbf{K}[[x]][y]$ de degré m en y tel que $c(f_l,h) = \dfrac{m_{b+1}^l}{n^l}$. Mais dans ce cas $int(f,h') \in \Delta_J(\alpha)$ où $l \notin J$, l'élément α étant un maximal absolu, on a alors que $\Delta_J(\alpha) = \emptyset$ pour tout $J \subset I$, ce qui aboutit à une contradiction. En particulier $int(h,f_l) = \dfrac{m}{n^l} r_b^l.d_b^l$.
D'autre part, comme α est irréductible alors $\dfrac{m}{n^l}.d_b^l = 1$. En particulier $int(f_l,h) = r_b^l$.

Théorème 1.3.24 *$V(f) = MAI(f)$.*

Démonstration L'inclusion $V(f) \subseteq MAI(f)$ n'est autre que la proposition 1.3.21. Montrons que $MAI(f) \subseteq V(f)$. Soit $\alpha \in V(f)$ et soit h un polynôme irréductible unitaire de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $\alpha = int(f,h)$:

$\diamond$ Si $c(h,f_l) \leq c$ alors le résultat découle de la prop. 1.3.22.

$\diamond$ Supposons que $c(h,f_l) > c$ et écrivons $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, d'après la prop. 1.3.23. soit b tel que $c(f,h_l) = \dfrac{m_b^l}{n^l}$, alors on a

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{int(f_l,f_i)}{d_b^l} & \text{si } c(h,f_i) < c(h,f_l) \\ r_b^i & \text{si } c(h,f_i) = c(h,f_l) \end{cases}$$

Par conséquent, $\max\{c(f_j,h), 1 \le j \le s\} = c(f_l,h) = \frac{m_b^l}{n^l}$, d'autre part, comme $int(h, f_l) = r_b^l$ alors on a $deg_y(h) = \frac{n^l}{d_b^l}$. En particulier, il existe $g \in \mathbf{C}^b$ tel que $\alpha = int(f,g)$.

Théorème 1.3.25 *Soit $MAI(f) = \{\beta^1, \ldots, \beta^m\}$. Soit*

$$F = \{\sum_1^m \lambda_i \beta^i, \lambda_i \in \mathbb{N}, \sum_1^m \lambda_i \beta^i < \tau\} \subset \Gamma(f)$$

où τ est l'élément défini dans le théorème 1.3.13., et soit

$$F' = \{\tau - \gamma; \gamma \in F\}$$

Alors $F = MA(f)$ et $F' = MR(f)$, en particulier si $\beta \in \mathbb{N}^s$ tel que $pr_J(\beta) \in \Gamma_J(f)$ pour tout $J \subset I$ de cardinal $s-1$, alors

$$\beta \in \Gamma(f) \text{ si et seulement si } \beta \notin \bar{\Delta}(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in F'.$$

Démonstration Résulte du théorème 1.3.11. et du théorème 1.3.14.

Définition 1.3.26 *Avec les notations ci-dessus, soit $l \in \{1, \ldots, s\}$, $f_l \in Q(M)$ et soit $Q'(M,l) \subset Q(M)$ défini de la façon suivante :*

$$\begin{cases} f_k \in Q'(M,l) \text{ si et seulement si } c(f_k, f_l) > M \\ f_k \notin Q'(M,l) \text{ si et seulement si } c(f_k, f_l) < M, \text{ dans ce cas on note } f_k \in \bar{Q}'(M,l). \end{cases}$$

remarquons que $Q'(M,l) \cup \bar{Q}'(M,l) \subset \{1, \ldots, s\}$, mais on peut ne pas avoir l'égalité. On note :

$$B = \{(M,l) \text{ tel que } Q'(M,l) \cup \bar{Q}'(M,l) = \{1, \ldots, s\}\}$$

Lemme 1.3.27 *Les notations sont celles de ci-dessus :*

- ⋄ *Si $M \neq \frac{m_a^j}{n^j}, 1 \le j \le s$ et $1 \le a \le h_j$ alors $(M,j) \notin B$.*
- ⋄ *Si $M = \frac{m_a^j}{n^j}, 1 \le j \le s$ et $1 \le a \le h_j$ alors*

$$(M,j) \in B \Longleftrightarrow c(f_j, f_k) \neq M \text{ pour tout } k \neq j.$$

Soit $1 \le j \le s$ et $1 \le a \le h_j$ tel que $(\frac{m_a^j}{n^j}, j) \in B$ et posons :

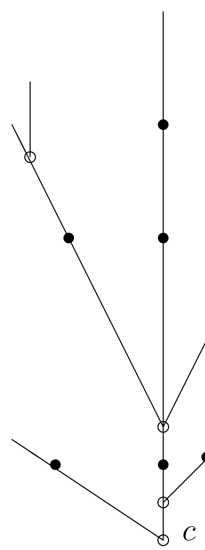
$$\gamma_k^{a,j} = \begin{cases} \frac{n^k}{n^j} r_a^j = r_a^k & \text{si } f_k \in Q'(\frac{m_a^j}{n^j}, j) \\ \frac{int(f_k, f_j)}{d_a^j} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\gamma^{a,j} = (\gamma_1^{a,j}, \ldots, \gamma_s^{a,j})$, et notons que puisque $int(f_j, f_j) = \infty$, alors $\gamma_j^{a,j} = r_a^j$. Notons aussi que si $f_{j_1}, f_{j_2} \in Q'(\frac{m_a^j}{n^j}, j)$ alors $\gamma^{a,j_1} = \gamma^{a,j_2}$. Avec ces notations, le théorème 1.3.24 peut être précisé de la manière suivante :

Proposition 1.3.28 *1) S'il existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c < \frac{m_1^i}{n^i}$ alors*

$$MAI(f) = \bigcup_{j=1}^{s} \{\gamma^{1,j}, \ldots, \gamma^{h_j,j}\}$$

Dans ce cas l'arbre peut avoir la forme suivante où les cercles pleins désignent les éléments de B.



2) Sinon, soit q le plus grand entier tel que $\frac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \frac{m_q^s}{n^s} < c$, et soit pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$

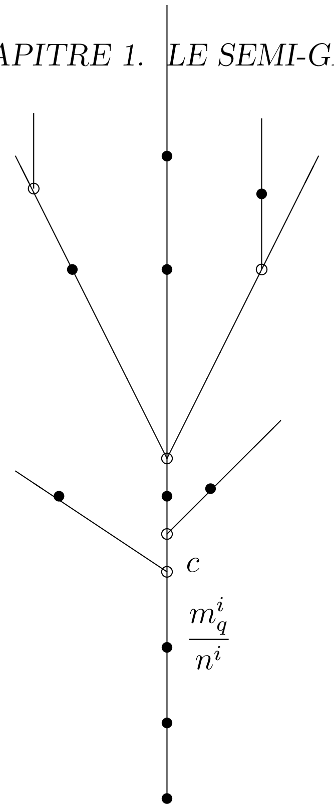
$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \dfrac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

et soit $A = \{j, L_j < h_j\}$ on a

$$MAI(f) = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^q\} \bigcup \bigcup_{j \in A} \{\gamma^{L_j+1,j}, \ldots \gamma^{h_j,j}\}$$

où $\alpha^a = (r_a^1, \ldots, r_a^s), a = 1, \ldots, q$.

Dans ce cas l'arbre peut avoir la forme suivante où les cercles pleins désignent les éléments de B.



1.3.5 Description du semi-groupe d'une courbe à trois branches

Dans cette section on donne deux exemples du semi-groupe d'une courbe ayant trois branches. Notons que ce semi-groupe dépend de la répartition des exposants caractéristiques de chaque branche sur l'arbre des contacts. On va considérer les différents cas que peut avoir l'arbre des contacts d'une courbe à trois branches. Les notations étant celles de 1.3., supposons que $s = 3$. Soit

$$c = \min\{c(f_i, f_j), 1 \leq i \neq j \leq 3\}$$

soit

$$(m_a^i)_{0 \leq a \leq h_i}, (d_a^i)_{0 \leq a \leq h_i+1}, (r_a^i)_{0 \leq a \leq h_i}$$

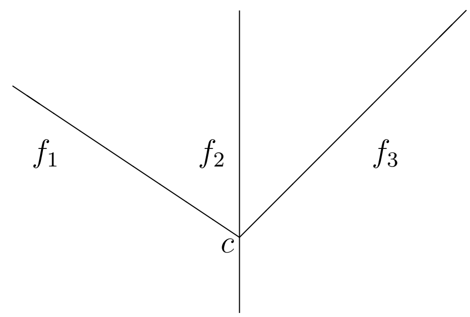
les suites caractéristiques de $f_i, i = 1, 2, 3$. Finalement soit q le plus grand entier tel que

$$\frac{m_q^1}{n^1} = \frac{m_q^2}{n^2} = \frac{m_q^3}{n^3} < c$$

et pour $j \in \{1, 2, 3\}$, on pose

$$L_j = \begin{cases} q & \text{si } c \neq \dfrac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>*Premier cas*</u> $c = c(f_i, f_j), 1 \leq i, j \leq 3$.

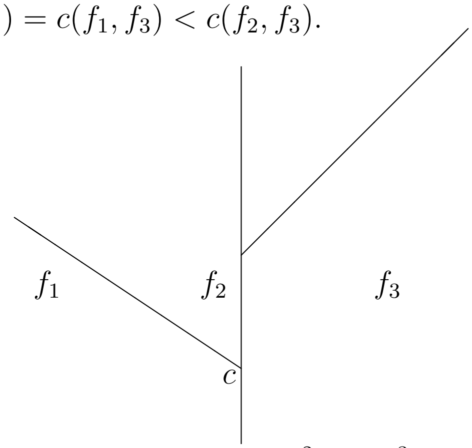


Dans ce cas,

$$MAI(f) = \{((r_a^1, r_a^2, r_a^3)|a \leq q, (r_a^1, \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1}, \frac{int(f_1, f_3)}{d_a^1})|L_1 < a \leq h_1,$$

$$(\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2}, r_a^2, \frac{int(f_2, f_3)}{d_a^2})|L_2 < a \leq h_2, (\frac{int(f_1, f_3)}{d_a^3}, \frac{int(f_2, f_3)}{d_a^3}, r_a^3)|L_3 < a \leq h_3\}$$

<u>*Deuxième cas*</u> $c = c(f_1, f_2) = c(f_1, f_3) < c(f_2, f_3)$.



Soit dans ce cas q' le plus grand entier tel que $\frac{m_{q'}^2}{n^2} = \frac{m_{q'}^3}{n^3} < c(f_2, f_3)$, et posons pour $j = 2, 3$

$$L'_j = \begin{cases} q & \text{si } c(f_2, f_3) \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que $\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2} = \frac{int(f_1, f_3)}{d_a^3}$ pour tout $a \leq q'$. On a

$$MAI(f) = \{(r_a^1, r_a^2, r_a^3)|a \leq q, (r_a^1, \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1}, \frac{int(f_1, f_3)}{d_a^1})|L_1 < a \leq h_1, (\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2}, r_a^2, r_a^3)|L_1 < a \leq q',$$

$$(\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2}, r_a^2, \frac{int(f_2, f_3)}{d_a^2})|L'_2 < a \leq h_2, (\frac{int(f_1, f_3)}{d_a^3}, \frac{int(f_2, f_3)}{d_a^3}, r_a^3)|L'_3 < a \leq h_3\}$$

Notons que les autres configurations se déduisent des deux cas précédents par une simple permutation des indices.

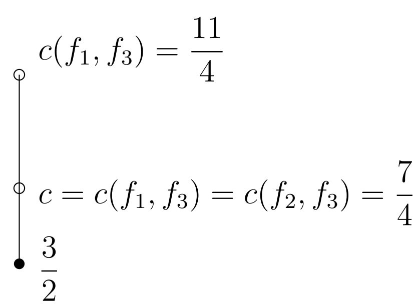
Exemple 1.3.29 *Soit* $f = f_1.f_2.f_3 = (y^2 - x^3).[(y^2 - x^3)^2 - x^5y].[(y^2 - x^3) - x^7y]$. *Les suites caractéristiques associées à* f_1*,* f_2 *et* f_3 *sont respectivement :*
$m_0^1 = r_0^1 = 2 = d_0^1 = d_1^1, m_1^1 = r_1^1 = 3$ *et* $d_1^1 = 1$*,* $m_0^2 = r_0^2 = 4 = d_0^2 = d_1^2, m_1^2 = r_1^2 = 6, d_2^2 = 2, m_2^2 = 7, r_2^2 = 13$ *et* $d_3^2 = 1$*,* $m_0^2 = r_0^2 = 4 = d_0^2 = d_1^2, m_1^2 = r_1^2 = 6, d_2^2 = 2, m_2^2 = 11, r_2^2 = 15$ *et* $d_3^2 = 1$.
Dans ce cas

$$c(f_1, f_2) = \frac{7}{4}, c(f_1, f_3) = \frac{11}{4} \text{ et } c(f_2, f_3) = \frac{7}{4}$$

En particulier $c = \dfrac{7}{4}$ *et* $q = 1$. *De plus on a*

$$MAI(f) = \{(2, 4, 4), (3, 6, 6)\}.$$

L'arbre associé à f *a la forme suivante :*



Chapitre 2

La fonction d'Artin-Greenberg d'une courbe plane

2.1 La fonction d'Artin-Greenberg

2.1.1 Généralités

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractérisque nulle et soit f une série de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Ecrivons $f = f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + ...$ où $f_i(x, y), i \geq n$ est un polynôme homogéne de degré i. On appelle n la multiplicité de f à l'origine et on note $n = mult_0(f)$. Par le théorème de Weierstrass, on peut supposer que $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} ... + a_n(x)$ où pour tout i, $a_i(0) = 0$.
Soit

$$f = \prod_{k=1}^{s} f_k$$

la décomposition de f en polynômes irréductibles.
Etant donné $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, on définit le t-ordre de ϕ par

$$\mathrm{ord}_t(\phi) = \min\{\mathrm{O_t}(\phi_1(\mathrm{t})), \mathrm{O_t}(\phi_2(\mathrm{t}))\}.$$

Définition 2.1.1 *La fonction d'Artin-Greenberg de f est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie telle que : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\beta(i)$ est le plus petit entier vérifiant la propriété suivante :*
Pour tout $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, si $\mathrm{O}_t f(\phi(t)) \geq \beta(i) + 1$, alors il existe $\psi(t)$ tel que $f(\psi(t)) = 0$ et $\mathrm{ord}_t(\phi(t) - \psi(t)) \geq i + 1$.

Définition 2.1.2 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, on dit que $\phi(t)$ est congru à f jusqu'à l'ordre i, et qu'on note $\phi \cong^i f$, s'il existe $\psi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ tel que $f(\psi(t)) = 0$ et $\mathrm{ord}_t(\phi(t) - \psi(t)) \geq i + 1$.*

Comme $f(\psi(t)) = f_1(\psi(t)) \ldots . f_s(\psi(t))$, alors $\phi \ncong^i f$ équivaut à $\phi \ncong^i f_k$ pour tout $k = 1 \ldots, s$.

Lemme 2.1.3 $\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t f(\phi(t)) | \phi \ncong^i f\}$.

Démonstration Notons $\beta'(i) = \max\{\mathrm{O}_t f(\phi(t)) | \phi \ncong^i f\}$ et soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, tel que $\mathrm{O}_t f(\phi(t)) \geq \beta(i) + 1$. Il existe $\psi(t)$ tel que $f(\psi(t)) = 0$ et $\mathrm{ord}_t(\phi(t) - \psi(t)) \geq i + 1$, en particulier $\phi \cong^i f$. Ceci montre que si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq \beta(i)$. En particulier,

$$\beta(i) \geq \beta'(i)$$

Supposons que $\beta(i) > \beta'(i)$. Pour tout $\phi \in \mathbf{K}[[t]]^2$, si $\phi \ncong^i f$, alors $\mathrm{O}_t f(\phi(t)) < \beta(i)$. En particulier, pour tout $\phi \in \mathbf{K}[[t]]^2$, si $\mathrm{O}_t f(\phi(t)) \geq \beta(i) > \beta'(i)$, alors $\phi \cong^i f$, d'où il existe $\psi(t)$ tel que $f(\psi(t)) = 0$, et $\mathrm{ord}_t(\phi(t) - \psi(t)) \geq i + 1$. En particulier $\beta'(i)$ vérifie la propriété de la définition 2.1.1., mais $\beta'(i) < \beta(i)$. Ce qui contredit la minimalité de $\beta(i)$.
On a aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.4 *Soit $\beta_j(i), j = 1, \ldots, s$ la fonction d'Artin-Greenberg de $f_j, j = 1, \ldots, s$. On a :*

$$\beta(i) \leq \sum_{j=1}^{s} \beta_j(i).$$

Remarque 2.1.5 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. On pose $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$, où $\bar{\phi}$ est une représentation primitive de ϕ (une représentation $\bar{\phi}$ est dite primitive si on ne peut pas trouver l et $\Phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ tel que $\bar{\phi}(t) = \Phi(t^l)$). Dans ce cas,*

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k. \sum_{j=1}^{s} int(f_j, g)$$

où g est le polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $g(\bar{\phi}(t)) = 0$.

Le lemme suivant est utile pour le calcul de $\beta(i)$.

Lemme 2.1.6 *Soit $i \in \mathbb{N}$, $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i$.*

Démonstration Si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{ord}_t(\phi(t) - \psi(t)) \leq i$ pour tout $\psi(t)$ tel que $f(\psi) = 0$. Si $k \in \mathbb{N}$ alors il existe $\psi(t)$ tel que $\mathrm{ord}_t(\psi)$ est un multiple de k. En particulier il existe une racine ψ de f tel que $\mathrm{ord}_t(\psi) > i$, d'où $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{ord}_t(\phi - \psi) \leq i$.

2.2 La fonction d'Artin-Greenberg d'une courbe plane irréductible

On expose dans cette section le calcul fait par M. Hickel [15]. Les notations étant celles de ci-dessus, on suppose que $s = 1$. Soit

$$f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit $(m_i)_{0 \leq i \leq h}, (d_i)_{0 \leq i \leq h+1}, (r_i)_{0 \leq i \leq h}$ les suites caractéristiques associées à f.

2.2.1 Calcul de $\beta(i)$ pour $i < n$

Lemme 2.2.1 *Soit $i \in \mathbb{N}, i < n$. On a*

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t(f(\phi)), \mathrm{ord_t}(\phi) \leq \mathrm{i}\}.$$

Démonstration D'après le lemme 2.1.3., on a $\beta(i) = \max\{\mathrm{ord}_t f(\phi(t)), \phi \not\cong^i f\}$. De plus, si $\phi \not\cong^i f$ alors $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$ par le lemme 2.1.6. Soit $\phi(t)$ tel que $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$ et soit $\psi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ une racine de f. Comme $\mathrm{ord}_t(\psi)$ est un multiple de n, alors $\mathrm{ord}_t(\phi - \psi) = \mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. En particulier, $\phi \not\cong^i f$.

Lemme 2.2.2 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) = mk \leq i$. Supposons que $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$, où $\bar{\phi(t)}$ est une représentation primitive de $\phi(t)$. Soit g le polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $g(\phi(t)) = 0$. Soit $s = \max\{0 \leq j \leq h | m \simeq 0(\dfrac{n}{d_{j+1}})\}$, donc*

$$k.int(f, g) \leq [\frac{id_{s+1}}{n}].r_{s+1}.$$

Démonstration D'après la prop.1.1.4.iii), on a $c(f, g) \leq \dfrac{m_{s+1}}{n}$. Par conséquent,

$$k.int(f, g) \leq k.\frac{m}{n}.r_{s+1} d_{s+1}$$

mais par la définition de s, on a $k.\dfrac{m}{n}.d_{s+1}$ est un entier, d'où

$$k.int(f, g) \leq [\frac{id_{s+1}}{n}].r_{s+1}.$$

Théorème 2.2.3 *Soit $i \in \mathbb{N}, i < n$ et soit q l'unique entier tel que $\dfrac{n}{d_q} \leq i < \dfrac{n}{d_{q+1}}$. On a*

$$\beta(i) = \max\{r_1.i, r_2.[\frac{id_2}{n}], \ldots, r_q[\frac{id_q}{n}]\}.$$

Démonstration Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2, \mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$.

$\diamond$ Si $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$ alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq n.i$.

$\diamond$ Si $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, alors soit $\bar{\phi}(t)$ une représentation primitive de $\phi(t)$. Ecrivons $\bar{\phi}(t) = (t^m, z(t))$ et supposons que $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$. Soit g le polynôme minimal de $z(x^{\frac{1}{m}})$ sur $\mathbf{K}((x))$, $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.int(f, g)$. Comme $i < \dfrac{n}{d_{q+1}}$ alors $c(f, g) \leq \dfrac{m_q}{n}$. Soit

$$s = \max\{0 \leq j \leq h | m \simeq 0(\frac{n}{d_{j+1}})\}$$

donc $s + 1 \leq q$ et par le lemme précédent

$$k.int(f, g) \leq [\frac{id_{s+1}}{n}].r_{s+1}.$$

Si $\tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id_{s+1}}{n}].\frac{n}{d_{s+1}}}, y_{<m_{s+1}}(t^{[\frac{id_{s+1}}{n}]}))$ où $y(t)$ est une racine de $f(t^n, y) = 0$ alors $\mathrm{O}_t(f(\tilde{\phi})) = [\dfrac{id_{s+1}}{n}]r_{s+1}$.

2.2.2 Lien entre $\beta(i)$ et le semi-groupe de f

Dans le théorème 2.2.3, on remarque que $\beta(1) = r_1$, $\beta(\frac{n}{d_2}) = r_2$, et que $\beta(\frac{n}{d_q}) = r_q$ pour tout $1 \leq q \leq h$. Mais $\{r_1, \dots, r_h\}$ avec la multiplicité de f à l'origine est l'ensemble des générateurs du semi-groupe de f. En particulier, le calcul de $\beta(i), i \leq \dfrac{n}{d_h}$ augmenté de n détermine le semi-groupe de f.

2.2.3 Calcul de $\beta(i)$ pour $i \geq n$

Soit :

$$k_a(i) = \begin{cases} [\frac{id_a}{n}] & \text{Si } [\frac{id_a}{n}] \not\equiv 0 \bmod d_a \\ [\frac{id_a}{n}] - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta(i,a) = \begin{cases} [\frac{i}{m_a}](r_a d_a - m_a.d_{a+1}) + id_{a+1} & \text{Si } [\dfrac{i}{m_{a+1}}] < [\dfrac{i}{m_a}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 2.2.4 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. Comme f est irréductible, alors*
$\phi \cong^i f \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n|\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f,\phi) > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

Démonstration

$\diamond$ Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2, \mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. Supposons que $\phi \cong^i f$, il existe alors $\psi(t)$ racine de $f(x,y) = 0$ tel que $\mathrm{ord}_t(\phi - \psi) \geq i+1$, mais comme $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$, on en déduit que $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{ord}_t(\psi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$. D'autre part, n divise $\mathrm{ord}_t(\psi)$ par conséquent, n divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$. Ecrivons $\phi(t) = (t^n p, \theta(t)) = (t^{ms}, z(t^s))$ où $\bar{\phi} = (t^m, z(t))$ est une représentation primitive de ϕ, d'autre part soit $\psi(t) = (u(t)^n, y_1(u(t))$, avec $u(t) = v(t)^p$ et $v(t) = at + z(t)$ et $\mathrm{O}_t(z) \geq 2$. Mais $a^{np} = 1$ d'où il existe $w \in U_n$ tel que $a^p = w$. Comme $\mathrm{ord}_t(\phi - \psi) \geq i+1$ alors $t^{np} - u(t)^n \geq i+1$ et par conséquent $\mathrm{O}_t(z) \geq 2 + i - np$.
Maintenant : $\mathrm{O}_t(y_1(v(t)^p) - y_1(w.t^p)) \geq i+1$ ainsi $\mathrm{O}_t(\theta(t) - y_1(t^p)) \geq i+1$.
D'autre part, $c(\phi,\psi) \geq \dfrac{1}{mn}\mathrm{O}_t(z(t^n) - y_1(t^m)) = \dfrac{1}{np}\mathrm{O}_t(z(t^{\frac{np}{m}}) - y(t^{\frac{mp}{m}})) = \mathrm{O}_t(\theta(t) - y_1(t^p)) \geq \dfrac{i+1}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

$\diamond$ Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[t]]^2$ tel que ϕ vérifie les conditions du lemme. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(t) = (t^{np}, \theta(t))$. Soit $m, s \in \mathbb{N}$ tel que $\phi = (t^{ms}, z(t^s))$ et $\bar{\phi} = (t^m, z(t))$ tel que $\bar{\phi}$ soit primitive dans $\mathbf{K}[[t]]^2$. Soit $\psi(t) = (t^{np}, y^1(t^p))$ une racine de f tel que $c(f,\bar{\phi}) = c(\bar{\psi},\bar{\phi})$ où $\bar{\psi} = (t^n, y^1(t))$ est primitive. On a :

$$c = \frac{1}{nm}\mathrm{O}_t(z(t^n) - y(t^m)) = \frac{1}{np}\mathrm{O}_t(z(t^{\frac{np}{m}}) - y(t^{\frac{mp}{m}}))$$

$$= \frac{1}{np}\mathrm{O}_t(z(t^s) - y(t^p)) > \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$$

Mais $\phi(t)-\psi(t)=(0,(z(t^s)-y(t^p))$. En particulier $\mathrm{ord}_t(\phi(t)-\psi(t)) > \frac{inp}{\mathrm{ord}_t(\phi)} = i$. Ce qui montre notre assertion.
On a aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.5 *Soit $\phi(t)\in \mathbf{K}[[t]]^2$, tel que $\mathrm{ord}_t(\phi)\le i$. Pour calculer $\beta(i)$, il suffit d'étudier $\mathrm{O}_t(f(\phi))$ lorsque ϕ vérifie l'une des conditions suivantes :*
1) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$.
2) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, *$n$ ne divise pas* $\mathrm{ord}_t(\phi)$.
3) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, *$n|\mathrm{O}_t(\phi)$ et $c(f,\phi)\le \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.*

Lemme 2.2.6 *Soit $\phi(t)\in \mathbf{K}[[t]]^2$, supposons que $\phi(t)=\bar{\phi}(t^k)$ où $\bar{\phi}(t)$ est une représentation primitive de $\phi(t)$. Posons $\mathrm{ord}_t(\bar{\phi}(t))=m$. Supposons que $km\le i$ et que n ne divise pas mk. Soit $s=\max\{0\le j\le h | m\simeq 0(\frac{n}{d_{j+1}})\}$. On a $\mathrm{O}_t(f(\phi))\le k_{s+1}(i).r_{s+1}$.*

Démonstration D'après la prop.1.1.4.iii), on a $int(f,g)\le \frac{m}{n}.r_{s+1}.d_{s+1}$. Soit l un entier vérifiant les conditions suivantes :
- (*)$l.\frac{n}{d_{s+1}}\le i$.
- (**)n ne divise pas $l.\frac{n}{d_{s+1}}$.

Clairement $l\le k_{s+1}(i)$. De plus, $k_{s+1}(i)$ vérifie les conditions (*) et (**). En particulier, $k_{s+1}(i)$ est le plus grand entier l pour lequel les conditions (*) et (**) sont satisfaites.
D'autre part, $mk=\mathrm{ord}_t(\phi(t))\le i$ et n ne divise pas mk. D'où $m.k.\frac{d_{s+1}}{n}$ vérifie les conditions (*) et (**), en particulier $m.k\le \frac{n}{d_{s+1}}k_{s+1}(i)$. Ceci implique que $\mathrm{O}_t(f(\phi))\le k_{s+1}(i).r_{s+1}$.

Théorème 2.2.7 *Soit $i\in\mathbb{N}, i\ge n$. On a*

$$\beta(i)=\max\{n.i, r_1.k_1(i),\ldots,r_h.k_h(i),\theta(i,1),\ldots,\theta(i,h)\}$$

Démonstration Soit $\phi(t)\in\mathbf{K}[[t]]^2, \mathrm{ord}_t(\phi)\le i$. D'après le corollaire 2.2.5. trois cas sont possibles :

1) Si $\mathrm{ord}_t(\phi)<\mathrm{O}_t(\phi_1)$ alors $\mathrm{O}_t(f(\phi))\le n.i$ et on a l'égalité si $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(0,t^i)$.

2) Si $\mathrm{ord}_t(\phi)=\mathrm{O}_t(\phi_1)$ et n ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$: soit $\bar{\phi}(t)$ une représentation primitive de $\phi(t)$. Ecrivons $\bar{\phi}(t)=(t^m,z(t))$ et supposons que $\phi(t)=\bar{\phi}(t^k)$. Soit g le polynôme minimal de $z(x^{\frac{1}{m}})$ sur $\mathbf{K}((x))$, $\mathrm{O}_t(f(\phi))=k.int(f,g)$. Comme n ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$ alors $c(f,g)\le\frac{m_h}{n}$. Soit

$$s=\max\{0\le j\le h|m\simeq 0(\frac{n}{d_{j+1}})\}$$

donc par le lemme 2.2.6.

$$k.int(f,g)\le k_{s+1}(i).r_{s+1}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k_{s+1}(i).\frac{n}{d_{s+1}}}, y_{<m_{s+1}}(t^{k_{s+1}(i)}))$ où $y(t)$ est une racine de $f(t^n, y(t)) = 0$.

3) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, n divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c = c(f,\phi) \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$: Soit $\phi(t) = (t^{np}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k))$ tel que $(t^m, \theta(t))$ est primitive.
Soit a l'unique entier tel que $m_a \leq \dfrac{i}{p} < m_{a+1}$, alors $[\dfrac{i}{m_{a+1}}] + 1 \leq p \leq [\dfrac{i}{m_a}]$. On a

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \frac{km}{n}(r_{q'}d_{q'} + (nc - m^1_{q'})d_{q'+1})$$

où $\dfrac{m_{q'}}{n^1} \leq c < \dfrac{m_{q'+1}}{n}$. Mais $c \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$ alors $q' \leq a$.
Si $q' < a$,

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_t(f(\phi)) &\leq \frac{km}{n}(r_a d_a + (m_{a+1} - m_a)d_{a+1}) \\ &= p.(r_a d_a - m_a d_{a+1}) + p.m_{a+1}d_{a+1} \\ &\leq \theta(i,a).\end{aligned}$$

Si $q' = a$, $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq \theta(i,a)$.
On a l'égalité pour

$$\tilde{\phi}(t) = (t^{n\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j,\tilde{p}j<i} c_j t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

Où $\tilde{p} = [\dfrac{i}{m_a}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$. Sous ces conditions, on a $c = \dfrac{i}{n\tilde{p}}$. En particulier, $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \theta(i,a)$.

2.3 La fonction d'Artin-Greenberg d'une courbe plane à deux branches

On suppose dans cette section que $s = 2$. Soit $f = f_1.f_2$ la décomposition de f en polynômes irréductibles dans $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit n^1(resp. n^2) le degré en y de f_1(resp. f_2), on suppose sans perte de généralité que $n^1 \leq n^2$. Pour $k = 1,2$, on utilise les notations suivantes : soit $y^k_i(t), i = 1,\ldots,n^k$ les racines de $f_k(t^{n^k}, y) = 0$. On associe à $f_k, k = 1,2$ les suites caractéristiques $(m^k_i)_{0\leq i\leq h_k}, (d^k_i)_{0\leq i\leq h_k+1}, (r^k_i)_{0\leq i\leq h_k}$ définies comme dans le premier chapitre.
Soit c le contact de f_1 avec f_2. Soit g un polynôme irréductible dans $\mathbf{K}[[x]][y]$ de degré m en y, et soit $c_k = c(f_k, g), k = 1,2$.

Lemme 2.3.1 *i) Si $c_1 < c$, alors $int(f_2, g) = \dfrac{n^2}{n^1} int(f_1, g)$.*

ii) Si $c_1 > c$, alors $int(f_2, g) = \dfrac{m}{n^1}.int(f_1, f_2)$.

iii) Si $c_1 = c$, alors $int(f_1, g) = \dfrac{m}{n^2}.int(f_1, f_2)$.

Démonstration Voir lemme 1.2.15., 1.2.16., et 1.2.17.

Remarque 2.3.2 *Soit* $S = \{\frac{int(f_1,g)}{n^1.m}, \frac{int(f_2,g)}{n^2.m}, \frac{int(f_1,f_2)}{n^1.n^2}\}$. *D'après le lemme précédent, deux éléments de* S *sont égaux, et le troisième est plus grand ou égal à la valeur commune de ces deux éléments.*

Soit $\Gamma(f)$ le semi-groupe de f et soit $MI(f)$ l'ensemble des maximaux irréductibles de $\Gamma(f)$, et rappelons que cet ensemble est caractérisé comme suit :

Proposition 2.3.3 *i) Si* $c < \frac{m_1^1}{n^1}$ *ou* $\frac{m_1^2}{n^2}$ *alors*

$$MI(f) = \{(r_a^1, \frac{int((f_1,f_2)}{d_a^1})|a \le h_1, (\frac{int((f_1,f_2)}{d_a^2}, r_a^2)|a \le h_2\}.$$

ii) Sinon, soit q *le plus grand entier tel que* $\frac{m_q^1}{n^1} = \frac{m_q^2}{n^2} < c$ *et on pose pour* $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

$$Alors\ MI(f) = \{(r_a^1, r_a^2)|a \le q, (r_a^1, \frac{int((f_1,f_2)}{d_a^1})|L_1 < a \le h_1, (\frac{int((f_1,f_2)}{d_a^2}, r_a^2)|L_2 < a \le h_2\}.$$

Ayant supposé $n^1 \le n^2$, on peut avoir soit $n^1 < n^2$, soit $n^1 = n^2$. Par souci de clarté on traite ces cas séparemment.

2.3.1 Calcul de $\beta(i)$ si $n^1 < n^2$

Calcul de $\beta(i)$ pour $i < n^1$

Lemme 2.3.4 *Soit* $i \in \mathbb{N}$, *si* $1 \le i < n^1$, *on a*

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t f(\phi(t))|\mathrm{ord}_t\phi(t) \le i\}$$

Démonstration D'après le lemme 2.1.3., on a $\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t f(\phi(t))|\phi \not\cong^i f\}$. De plus, si $\phi \not\cong^i f$ alors $\mathrm{ord}_t(\phi) \le i$ par le lemme 2.1.6. Soit $\phi(t)$ tel que $\mathrm{ord}_t(\phi) \le i$ et soit $\psi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ une racine de f. Comme $\mathrm{ord}_t(\psi)$ est un multiple de n^1 ou de n^2, alors $\mathrm{ord}_t(\phi - \psi) = \mathrm{ord}_t(\phi) \le i$. En particulier, $\phi \not\cong^i f$.

Soit $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ un élément primitif de $\mathbf{K}[[t]]^2$ tel que $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$. On pose $\tilde{m} = \mathrm{ord}_t(\phi(t))$ et $\phi_1(t) = T^{\tilde{m}}$. Notons $\tilde{\phi}(T) = (T^{\tilde{m}}, \tilde{\phi}_2(T))$, et soit g le polynôme minimal de

$\tilde{\phi}_2(x^{\frac{1}{\tilde{m}}})$ sur $\mathbf{K}((x))$. Il existe $b_1(x),\ldots,b_{\tilde{m}}(x)$ tel que $g(x,y)=y^{\tilde{m}}+b_1(x)y^{\tilde{m}-1}+\ldots+b_{\tilde{m}}(x)$. D'autre part, $\mathrm{O}_t(f(\phi(t)))=\mathrm{O}_T(f(T^{\tilde{m}},\tilde{\phi}_2(T)))=int(f,g)$. En particulier,

$$\beta(i)=max\{k.int(f,g), g \text{ est un polynôme unitaire irréductible de } \mathbf{K}[[x]][y]$$

$$\text{tel que } k.mult_0(g)\leq i\}.$$

D'après la remarque 2.3.2., on a :

1) Si $int(f_1,g)<\dfrac{m}{n^2}int(f_1,f_2)$, alors $k.int(f,g)=k.int(f_1,g)(1+\dfrac{n^2}{n^1})$.

2) Si $int(f_1,g)>\dfrac{m}{n^2}int(f_1,f_2)$, alors $k.int(f,g)=k.(int(f_1,g)+\dfrac{m}{n^1}.int(f_1,f_2))$.

3) Si $int(f_1,g)=\dfrac{m}{n^2}int(f_1,f_2)$, alors $k.int(f,g)=k.(int(f_2,g)+\dfrac{m}{n^2}.int(f_1,f_2))$.

Soit g un polynôme unitatire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ de degré m en y et soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $km\leq i$.

$\diamond$ Si $mult_0(g)<deg_y(g)$ alors $k.int(f,g)=k.mult_0(g).n\leq(n^1+n^2).i$.

$\diamond$ Si $mult_0(g)=deg_y(g)$, on définit les ensembles suivants :

$$A_1=\{k.int(f_1,g)(1+\frac{n^2}{n^1})|int(f_1,g)<\frac{m}{n^2}int(f_1,f_2)\}.$$

$$A_2=\{k.(int(f_1,g)+\frac{m}{n^1}.int(f_1,f_2))|int(f_1,g)>\frac{m}{n^2}int(f_1,f_2)\}.$$

$$A_3=\{k.(int(f_2,g)+\frac{m}{n^2}.int(f_1,f_2))|int(f_1,g)=\frac{m}{n^2}int(f_1,f_2)\}.$$

Pour $i<n^1$, le calcul de $\beta(i)$ revient donc à calculer max $(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\{(n^1+n^2).i\})$.

Dans ce qui suit, on considère l'arbre des contacts de $f_1.f_2$ (Voir 1.3.1). L'étude de $\beta(i)$ dans ce cas peut être décrite de la façon suivante : soit $g_j, j=1,2,3$ tel que

$$\begin{cases} c(f_1,g_1)=c(f_2,g_1)<c(f_1,f_2) \\ c(f_1,g_2)>c(f_1,f_2) \\ c(f_2,g_3)>c(f_1,f_2) \end{cases} \qquad (*)$$

Il suffit alors de calculer $k.int(f, g_j), j = 1, 2, 3$, en faisant varier g_j de façon de vérifier (*) et tel que $k.mult_0(g_j) \leq i$. Sous les mêmes conditions sur g_1, g_2 et g_3, on représente dans les figures ci-dessous un exemple de l'arbre des contacts de $f_1.f_2$ (Fig.1), de $f_1.f_2.g_1$ (Fig.2), de $f_1.f_2.g_2$ (Fig.3) et de $f_1.f_2.g_3$ (Fig.4).

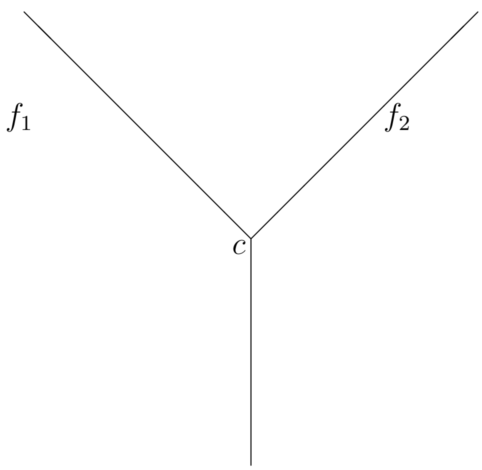


Fig.1

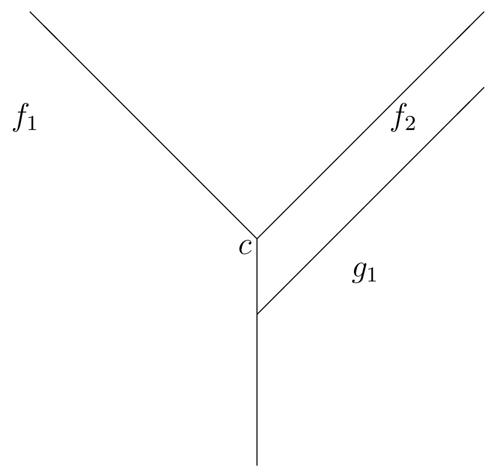


Fig.2

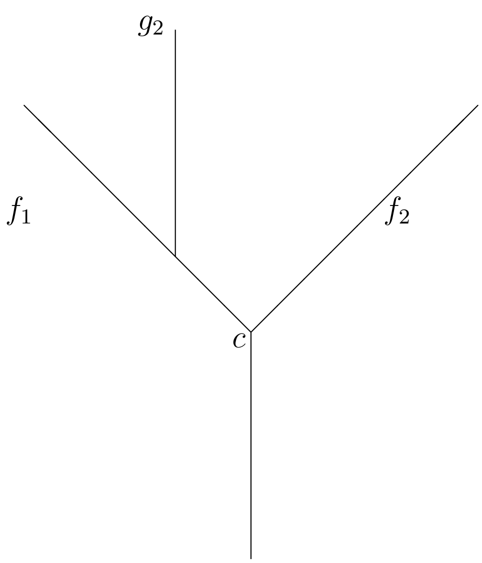


Fig.3

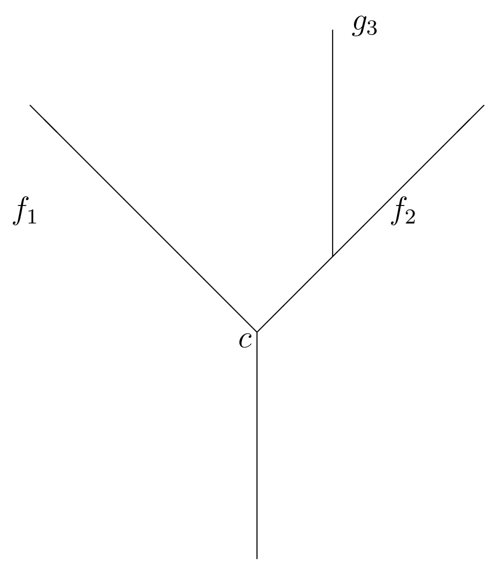


Fig.4

Lemme 2.3.5 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) = mk \leq i$. Supposons que $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$, où $\bar{\phi}(t)$ est une représentation primitive de $\phi(t)$. Soit g le polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$*

tel que $g(\phi(t)) = 0$. *Pour* $l = 1, 2$, *posons* $s_l = \max\{0 \leq j \leq h_l | m \simeq 0(\frac{n^l}{d^l_{j+1}})\}$. *Alors*

$$k.int(f_l, g) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}.$$

Démonstration D'après la prop.1.1.4.iii), on a $c_l \leq \frac{m^l_{s_l+1}}{n^l}$, par conséquent,

$$k.int(f_l, g) \leq k.\frac{m}{n^l}.r^l_{s_l+1} d^l_{s_l+1}$$

mais par la définition de s_l, $k.\frac{m}{n^l}.d^l_{s_l+1}$ est un entier, d'où

$$k.int(f_l, g) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}.$$

Soit q_1 (resp. q_2) l'unique entier tel que $\frac{n^1}{d^1_{q_1}} \leq i < \frac{n^1}{d^1_{q_1+1}}$ (resp. $\frac{n^2}{d^2_{q_2}} \leq i < \frac{n^2}{d^2_{q_2+1}}$).
Avec ces notations on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.6 *I) Si* $c < \frac{m^1_1}{n^1}$ *ou* $\frac{m^2_1}{n^2}$, *alors*

$$\beta(i) = \max\{(r^1_a + \frac{int(f_1, f_2)}{d^1_a}).[\frac{id^1_a}{n^1}] | a \leq q_1, (r^2_a + \frac{int(f_1, f_2)}{d^2_a}).[\frac{id^2_a}{n^2}] | a \leq q_2\}.$$

II) Sinon, soit q *le plus grand entier tel que* $\frac{m^1_q}{n^1} = \frac{m^2_q}{n^2} < c$ *et soit pour* $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \frac{m^j_{q+1}}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

i) Si $q < q_1$, *alors*

$$\beta(i) = \max\{(r^1_a + r^2_a).[\frac{id^1_a}{n^1}] | a \leq q, (r^1_a + \frac{int(f_1, f_2)}{d^1_a}).[\frac{id^1_a}{n^1}] | L_1 < a \leq q_1,$$

$$(r^2_a + \frac{int(f_1, f_2)}{d^2_a}).[\frac{id^2_a}{n^2}] | L_2 < a \leq q_2\}.$$

ii) Si $q_1 \leq q$, *alors* $\beta(i) = \max\{(r^1_a + r^2_a).[\frac{id^1_a}{n^1}] | a \leq q_1\}$.

Démonstration On démontre la partie II, la démonstration de I étant similaire. Soit g un polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $mult_0(g) = m$, et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $km \leq i$. On pose $c(f_l, g) = c_l, l = 1, 2$.

Comme $\frac{n^1}{d^1_{q_1}} \leq i < \frac{n^1}{d^1_{q_1+1}}$ (resp. $\frac{n^2}{d^2_{q_2}} \leq i < \frac{n^2}{d^2_{q_2+1}}$), alors $c_1 \leq \frac{m^1_{q_1}}{n^1}$ (resp. $c_2 \leq \frac{m^2_{q_2}}{n^2}$).
II.i) Supposons que $q < q_1$.
Soit $s_1 = \max\{0 \leq j \leq h_1 | m \simeq 0(\frac{n^1}{d^1_{j+1}})\}$ et $s_2 = \max\{0 \leq j \leq h_2 | m \simeq 0(\frac{n^2}{d^2_{j+1}})\}$. Clairement $c_1 \leq \frac{m^1_{s_1+1}}{n^1}$ et $c_2 \leq \frac{m^2_{s_2+1}}{n^2}$. Mais d'après le lemme 2.3.5., $k.int(f_1, g) \leq [\frac{i.d^1_{s_1+1}}{n^1}].r^1_{s_1+1}$ et $k.int(f_2, g) \leq [\frac{i.d^2_{s_2+1}}{n^2}].r^2_{s_2+1}$. On a :
cas 1) Si $mult_0(g) < deg_y(g)$, alors $k.int(f, g) \leq (n^1 + n^2).i$.
cas 2) Si $mult_0(g) = deg_y(g)$, on a les cas suivants :
1) $\frac{int(f_1, g)}{m} < \frac{int(f_1, f_2)}{n^2}$, dans ce cas, $\frac{int(f_1, g)}{n^1} = \frac{int(f_2, g)}{n^2}$:

◇ Si $s_1 + 1 \leq q$, alors $int(f_2, g) = \frac{n^2}{n^1} int(f_1, g)$, par suite

$$k.int(f, g) = k.int(f_1, g)(1 + \frac{n^2}{n^1}) \leq [\frac{i.d^1_{s_1+1}}{n^1}].r^1_{s_1+1}(1 + \frac{n^2}{n^1}).$$

Si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}].\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{[i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}]}))$ et g est le polynôme unitaire irréductible tel que $g(\phi(t)) = 0$, alors

$$k.int(f, g) = [\frac{i.d^1_{s_1+1}}{n^1}].r^1_{s_1+1}(1 + \frac{n^2}{n^1}) = [\frac{id^1_{s_1+1}}{n^1}](r^1_{s_1+1} + r^2_{s_1+1}).$$

◇ Si $s_1 + 1 > q$, alors $int(f_2, g) \leq \frac{m}{n^1}.int(f_1, f_2)$, par suite

$$\begin{aligned} k.int(f, g) &\leq [i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}].r^1_{s_1+1} + \frac{km}{n^1}.int(f_1, f_2) \\ &= [i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}].r^1_{s_1+1} + \frac{km.d^1_{s_1+1}}{n^1}.\frac{int(f_1, f_2)}{d^1_{s_1+1}} \\ &\leq [i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}].(r^1_{s_1+1} + \frac{int(f_1, f_2)}{d^1_{s_1+1}}) \end{aligned}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}].\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{[i.\frac{d^1_{s_1+1}}{n^1}]}))$.
2) $\frac{int(f_1, g)}{m} > \frac{int(f_1, f_2)}{n^2}$, alors

$$k.int(f, g) = k.(int(f_1, g) + \frac{m}{n^1}.int(f_1, f_2))$$

$$\leq [\frac{id^1_{s_1+1}}{n^1}].(r^1_{s_1+1} + \frac{int(f_1, f_2)}{d^1_{s_1+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^1_{s_1+1}}{n^1}].\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{[\frac{id^1_{s_1+1}}{n^1}]}))$.

3) $\dfrac{int(f_1, g)}{m} = \dfrac{int(f_1, f_2)}{n^2}$, alors

$$k.int(f, g) = k.(int(f_2, g) + \frac{m}{n^2} int(f_1, f_2))$$

$$\leq [\frac{i.d^2_{s_2+1}}{n^2}].(r^2_{s_2+1} + \frac{int(f_1, f_2)}{d^2_{s_2+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^2_{s_2+1}}{n^2}].\frac{n^2}{d^2_{s_2+1}}}, y^2_{<m^2_{s_2+1}}(t^{[\frac{id^2_{s_2+1}}{n^2}]}))$.

II.ii) Si $q_1 \leq q$ alors $q_1 = q_2$. De plus, puisque $c_1 \leq \dfrac{m^1_{q_1}}{n^1}$, alors $c_1 = c_2 < c$, et par conséquent $k.int(f, g) = k.int(f_1, g)(1 + \dfrac{n^1}{n^2})$, ceci montre II.ii).

Remarque 2.3.7 *Si f_1 et f_2 sont équisinguliers et $c > m^1_{h_1}$, alors*

$$\beta(i) = max\{2r^1_a.[\frac{id^1_a}{n^1}] | a \leq q_1\}.$$

Calcul de $\beta(i)$ pour $n^1 \leq i < n^2$

Soit :

$$k^1_a(i) = \begin{cases} [\frac{id^1_a}{n^1}] & \text{Si } [\frac{id^1_a}{n^1}] \not\equiv 0 \bmod d^1_a \\ [\frac{id^1_a}{n^1}] - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta^1(i, a) = \begin{cases} [\frac{i}{m^1_a}](r^1_a d^1_a - m^1_a.d^1_{a+1}) + id^1_{a+1} & \text{Si } [\dfrac{i}{m^1_{a+1}}] < [\dfrac{i}{m^1_a}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 2.3.8 *Soit $i \in \mathbb{N}$, $n^1 \leq i < n^2$,*

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t f(\phi(t)) | \phi \not\cong^i f_1, \mathrm{ord}_t(\phi) \leq i\}$$

Démonstration En effet, si $\phi \not\cong^i f$ alors $\phi \not\cong^i f_1$ et $\phi \not\cong^i f_2$ et comme $i < n^2$ alors $\phi \not\cong^i f_2$ est équivalent à $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$ par le lemme 2.3.4.

Lemme 2.3.9 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. Comme f_1 est irréductible, alors* $\phi \cong^i f_1 \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n^1 | \mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_1, \phi) > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

Démonstration Voir lemme 2.2.4.

On a aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.10 *Soit* $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$*, tel que* $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$*. Pour calculer* $\beta(i)$*, il faut considérer l'un des cas suivants :*
1) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$.
2) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$*,* n^1 *ne divise pas* $\mathrm{ord}_t(\phi)$.
3) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$*,* $n^1|\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_1, \phi) \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

Lemme 2.3.11 *Soit* $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$*. Supposons que* $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$ *où* $\bar{\phi}(t)$ *est une représentation primitive de* $\phi(t)$*. Posons* $\mathrm{ord}_t(\bar{\phi}(t)) = m$ *et supposons que* $km \leq i$ *et que* n^1 *ne divise pas* mk*. Soit* $s_1 = \max\{0 \leq j \leq h_1 | m \simeq 0(\dfrac{n^1}{d^1_{j+1}})\}$*. On a* $\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) \leq k^1_{s_1+1}(i).r^1_{s_1+1}$.

Démonstration D'après la prop.1.1.4.iii), on a $int(f_1, g) \leq \dfrac{m}{n^1}.r^1_{s_1+1}.d^1_{s_1+1}$. Soit l un entier vérifiant les conditions suivantes :

- $(*) l.\dfrac{n^1}{d^1_{s_1+1}} \leq i.$
- $(**) n^1$ ne divise pas $l.\dfrac{n^1}{d^1_{s+1}}$.

Clairement $l \leq k^1_{s_1+1}(i)$. De plus, $k^1_{s_1+1}(i)$ vérifie les conditions (*) et (**). En particulier, $k^1_{s_1+1}(i)$ est le plus grand entier l pour lequel les conditions (*) et (**) sont satisfaites.

D'autre part, $mk = \mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i$ et n^1 ne divise pas mk. D'où $m.k.\dfrac{d^1_{s_1+1}}{n^1}$ vérifie les conditions (*) et (**), en particulier $m.k \leq \dfrac{n^1}{d^1_{s_1+1}} k^1_{s_1+1}(i)$. Ceci implique que $\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) \leq k^1_{s_1+1}(i).r^1_{s_1+1}$.

Soit q_2 l'unique entier tel que $\dfrac{n^2}{d^2_{q_2}} \leq i < \dfrac{n^2}{d^2_{q_2+1}}$.

Théorème 2.3.12 *I) Si* $c < \dfrac{m^1_1}{n^1}$ *ou* $\dfrac{m^2_1}{n^2}$*, alors*

$$\beta(i) = \max\{(n^1 + n^2)i, k^1_a(i)(r^1_a + \frac{int(f_1, f_2)}{d^1_a}), a \leq h_1,$$

$$\theta^1(i, a) + [\frac{i}{m^1_a}].\frac{int(f_1, f_2)}{d^1_a} | a \leq h_1, [\frac{id^2_a}{n^2}](r^2_a + \frac{int(f_1, f_2)}{d^2_a}) | a \leq q_2\}.$$

II) Sinon soit q *le plus grand entier tel que* $\dfrac{m^1_q}{n^1} = \dfrac{m^2_q}{n^2} < c$ *et soit pour* $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \dfrac{m^j_{q+1}}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

i) Si $q < q_2$, alors

$$\beta(i) = \max\{(n^1+n^2)i, [\frac{id_a^2}{n^2}](r_a^1+r_a^2), \theta^1(i,a) + \frac{n^2}{n^1}.\theta^1(i,a)|a \leq q,$$
$$k_a^1(i)(r_a^1 + \frac{int(f_1,f_2)}{d_a^1}), \theta^1(i,a) + [\frac{i}{m_a^1}].\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^1}|L_1 < a \leq h_1,$$
$$[\frac{id_a^2}{n^2}](r_a^2 + \frac{int(f_1,f_2)}{d_a^2})|L_2 < a \leq q_2\}.$$

ii) Si $q_2 \leq q$, alors

$$\beta(i) = \max\{(n^1+n^2)i, [\frac{id_a^2}{n^2}](r_a^1+r_a^2), \theta^1(i,a) + \frac{n^2}{n^1}.\theta^1(i,a)|a \leq q_2\}$$

Démonstration On démontre la partie II, la démonstration de I étant similaire. Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ tel que $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i$ et écrivons $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$ où $\bar{\phi}(t)$ est une représentation primitive de $\phi(t)$. Soit g le polynôme unitaire irréductible tel que $g(\bar{\phi}(t)) = 0$. On pose $c(f_l, g) = c_l, l = 1, 2$. Comme $\frac{n^2}{d_{q_2}^2} \leq i < \frac{n^2}{d_{q_2+1}^2}$, alors $c_2 \leq \frac{m_{q_2}^2}{n^2}$.
i) Supposons que $q_2 > q$. Dans ce cas, soit

$$s_1 = \max\{0 \leq j \leq h_1 | m \simeq 0(\frac{n^1}{d_{j+1}^1})\}, s_2 = \max\{0 \leq j \leq h_2 | m \simeq 0(\frac{n^2}{d_{j+1}^2})\}$$

Par le lemme 2.3.5. et le lemme 2.3.11., $k.int(f_2, g) \leq [\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}].r_{s_2+1}^2$ et $k.int(f_1, g) \leq k_{s_1+1}^1(i).r_{s_1+1}^1$. D'après le corollaire 2.3.10., trois cas sont possibles :

1^{er} cas) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq (n^1+n^2).i$ et on a l'égalité si $\phi(t) = (0, t^i)$.

$2^{\text{ème}}$ cas) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, n^1 ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$. Rappelons que par la remarque 2.3.2., on a trois cas :

1) $int(f_1, g) < \frac{m}{n^2} int(f_1, f_2)$, dans ce cas, $\frac{int(f_1,g)}{n^1} = \frac{int(f_2,g)}{n^2}$:

$\diamond$ Si $s_2+1 \leq q$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}].r_{s_2+1}^2(1+\frac{n^1}{n^2})$. Si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}].\frac{n^2}{d_{s_2+1}^2}}, y_{<m_{s_2+1}^2}^2(t^{[\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}]}))$ alors $\mathrm{O}_t(f(\tilde{\phi})) = [\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}].r_{s_2+1}^2(1+\frac{n^1}{n^2}) = [\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}](r_{s_2+1}^1 + r_{s_2+1}^2)$.

$\diamond$ Si $s_2+1 > q$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}].(r_{s_2+1}^2 + \frac{int(f_1,f_2)}{d_{s_2+1}^2})$ et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}].\frac{n^2}{d_{s_2+1}^2}}, y_{<m_{s_2+1}^2}^2(t^{[\frac{id_{s_2+1}^2}{n^2}]}))$.

2) $int(f_1, g) > \frac{m}{n^2} int(f_1, f_2)$, dans ce cas

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_1,g) + \frac{m}{n^1}.int(f_1,f_2))$$

$$\leq k^1_{s_1+1}(i)(r^1_{s_1+1}(i) + \frac{int(f_1, f_2)}{d^1_{s_1+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^1_{s_1+1}(i).\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{k^1_{s_1+1}(i)}))$.

3) $int(f_1, g) = \frac{m}{n^2} int(f_1, f_2)$, dans ce cas

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_2, g) + \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2))$$

$$\leq [\frac{i.d^2_{s_2+1}}{n^2}].(r^2_{s_2+1} + \frac{int(f_1, f_2)}{d^2_{s_2+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^2_{s_2+1}}{n^2}].\frac{n^2}{d^2_{s_2+1}}}, y^2_{<m^2_{s_2+1}}(t^{[\frac{id^2_{s_2+1}}{n^2}]})$.

3$^{\text{ème}}$ cas) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, $n^1 | \mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_1 = c(f_1, \phi) \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

1) Si $int(f_1, g) < \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2)$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.int(f_1, g)(1+\frac{n^2}{n^1})$. Soit $\phi(t) = (t^{n^1 p}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k))$ tel que $(t^m, \theta(t))$ est primitive.
Soit a l'entier unique tel que $m^1_a \leq \frac{i}{p} < m^1_{a+1}$, alors $[\frac{i}{m^1_{a+1}}] + 1 \leq p \leq [\frac{i}{m^1_a}]$. On a :

$$\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) = \frac{km}{n^1}(r^1_{q'} d^1_{q'} + (n^1 c_1 - m^1_{q'}) d^1_{q'+1})$$

où $\frac{m^1_{q'}}{n^1} \leq c_1 < \frac{m^1_{q'+1}}{n^1}$. Mais $c_1 \leq \frac{i}{\mathrm{O}_t(\phi)}$ alors $q' \leq a$.
Si $q' < a$,

$$\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) \leq \frac{km}{n^1}(r^1_a d^1_a + ({m^1}_{a+1} - {m^1}_a) d^1_{a+1})$$

$$= p.(r^1_a d^1_a - {m^1}_a d^1_{a+1}) + p.{m^1}_{a+1} d^1_{a+1}$$

$$\leq \theta^1(i, a).$$

Si $q' = a$, $\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) \leq \theta^1(i, a)$.
On a l'égalité pour

$$\tilde{\phi}(t) = (t^{n^1 \tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j, pj < i} c^1_j t^{\tilde{p} j} + Z t^i).$$

Où $\tilde{p} = [\frac{i}{m^1_a}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$. Sous ces conditions on a $c_1 = \frac{i}{n^1 \tilde{p}}$. En particulier, $\mathrm{O}_t(f_1(\tilde{\phi})) = \theta^1(i, a)$, et par le lemme 2.3.1.i) $\mathrm{O}_t(f_2(\tilde{\phi})) = \frac{n^2}{n^1}.\theta^1(i, a)$.

2) Si $int(f_1, g) > \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2)$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_1, g) + \frac{m}{n^1}.int(f_1, f_2))$. Avec le même argument que dans 1), on a $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq \theta^1(i, a) + [\frac{i}{m_a^1}].\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1}$ et l'égalité est atteinte pour

$$\tilde{\phi}(t) = (t^{n^1 \tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j, \tilde{p}j < i} c_j^1 t^{\tilde{p}j} + Zt^i)$$

où $\tilde{p} = [\frac{i}{m_a^1}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$.

3) Si $int(f_1, g) = \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2)$, on conclut comme dans le deuxième cas, partie 3).

II.ii) Si $q_2 \leq q$, un calcul similaire montre le résultat. Remarquons que dans ce cas, $c_2 = c(f_2, g) \leq \frac{m_{q_2}^2}{n^2}$, ce qui implique que les termes $k_a^1(i), \theta^1(i, a), a > L_1$ n'apparaissent pas.

La fonction d'Artin-Greenberg et le semi-groupe de f

Dans cette partie, on étudie la relation entre la fonction d'Artin-Greenberg et le semi-groupe de f. Remarquons que dans les théorèmes 2.3.6. et 2.3.12., en considérant $(\mathrm{O}_t(f_1(\phi), \mathrm{O}_t(f_2(\phi)))$ comme étant un élément de $\mathbb{N}^2$, et en regardant l'ensemble $\{\beta(\frac{n^l}{d_a^l}), l = 1, 2, 1 \leq a \leq h_l\}$, on trouve l'ensemble

$$\begin{cases} \{(r_a^1, \frac{int((f_1, f_2)}{d_a^1})|a \leq h_1, (\frac{int((f_1, f_2)}{d_a^2}, r_a^2)|a \leq h_2\} & \text{si } c < \frac{m_1^1}{n^1} \text{ ou } \frac{m_1^2}{n^2} \\ \{(r_a^1, r_a^2)|a \leq q, (r_a^1, \frac{int((f_1, f_2)}{d_a^1})|L_1 < a \leq h_1\, (\frac{int((f_1, f_2)}{d_a^2}, r_a^2)|L_2 < a \leq h_2\} & \text{sinon} \end{cases}$$

où q est le plus grand entier tel que $\frac{m_q^1}{n^1} = \frac{m_q^2}{n^2} < c$ et pour $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & \text{si } c \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais, cet ensemble avec les multiplicités à l'origine de f_1 et f_2 est équivalent à la donnée de l'ensemble des maximaux irréductibles du semi-groupe de f, d'après le premier chapitre la proposition 1.2.19.

Exemple 2.3.13 *Soit* $f = f_1.f_2 = (y^2 - x^3)((y^2 - x^3)^2 - x^5 y)$.
Les suites caractéristiques associées à f_1 et f_2 sont respectivement :
$m_0^1 = r_0^1 = 2 = d_0^1 = d_1^1$, $m_1^1 = r_1^1 = 3$ *et* $d_2^1 = 1$, $m_0^2 = r_0^2 = 4 = d_0^1 = d_1^1$, $m_1^2 = 6 = r_1^2$, $d_2^2 = 2$, $m_2^2 = 7$, $d_3^2 = 1$ *et* $r_2^2 = 13$. *Dans ce cas* $c(f_1, f_2) = \frac{7}{4}$ *et* $q = 1$.
Les formules trouvées dans le théorème 2.3.6. et le théorème 2.3.12. donnent $\beta(1) = 3 + 6 = 9$, $\beta(2) = 18$ *et* $\beta(3) = 27$.

D'après le premier chapitre, on sait que pour avoir le semi-groupe de f on a besoin de l'ensemble des maximaux irréductibles de $\Gamma(f)$, le semi-groupe de f_1, et celui de f_2. Dans [14] M.Hickel a montré que la fonction d'Artin-Greenberg d'un polynôme irréductible avec sa multiplicité à l'origine déterminent son semi-groupe. Ainsi, pour avoir le semi-groupe de $f = f_1.f_2$, il suffit d'avoir β_1, β_2 et β avec les multiplicités de f_1, f_2 à l'origine. En effet β détermine l'ensemble des maximaux irréductibles de $\Gamma(f)$, β_1 avec la mutiplicité de f_1 à l'origine (resp. β_2 avec la multiplicité de f_2 à l'origine) déterminent $\Gamma(f_1)$ (resp. $\Gamma(f_2)$). Ceci suffit d'après la proposition 1.2.19. pour déterminer le semi-groupe de f.

Calcul de $\beta(i)$ pour $i \geq n^2$

Soit

$$k_a^2(i) = \begin{cases} [\frac{id_a^2}{n^2}] & \text{Si } [\frac{id_a^2}{n^2}] \not\equiv 0 \bmod d_a^2 \\ [\frac{id_a^2}{n^2}] - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta^2(i,a) = \begin{cases} [\frac{i}{m_a^2}](r_a^2 d_a^2 - m_a^2.d_{a+1}^2) + id_{a+1}^2 & \text{Si}[\dfrac{i}{m_{a+1}^2}] < [\dfrac{i}{m_a^2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 2.3.14 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. Comme f_2 est irréductible, alors* $\phi \cong^i f_2 \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n^2|\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_2,\phi) > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

Démonstration Voir lemme 2.2.4.

Lemme 2.3.15 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i, \phi(t) = (t^m, y(t))$, et soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geq n^2$:* $\phi \cong^i f \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$ *et* $((n^1|\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_1,\phi) > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)})$ *ou* $(n^2|\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_2,\phi) > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}))$.

Corollaire 2.3.16 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i$. Pour calculer $\beta(i)$, il suffit d'étudier $\mathrm{O}_t(f(\phi(t)))$ lorsque ϕ vérifie l'une des conditions suivantes :*

1) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$.

2) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, *$n^1$ ne divise pas* $\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et*

$$\begin{cases} \textit{soit } n^2 \textit{ ne divise pas } \mathrm{ord}_t(\phi) \\ \textit{soit } n^2 \textit{ divise } \mathrm{ord}_t(\phi) \textit{ et } c(f_2,\phi) \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}. \end{cases}$$

3) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, *$n^1$ divise* $\mathrm{ord}_t(\phi)$, $c(f_1,\phi) \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$ *et*

$$\begin{cases} \textit{soit } n^2 \textit{ ne divise pas } \mathrm{ord}_t(\phi) \\ \textit{soit } n^2 \textit{ divise } \mathrm{ord}_t(\phi) \textit{ et } c(f_2,\phi) \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}. \end{cases}$$

Lemme 2.3.17 *Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, on suppose que $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$ où $\bar{\phi}(t)$ est une représentation primitive de $\phi(t)$. Posons $\mathrm{ord}_t(\bar{\phi}(t)) = m$. Supposons que $km \leq i$ et que n^2 ne divise pas mk. Soit $s_2 = \max\{0 \leq j \leq h_2 | m \simeq 0(\frac{n^2}{d^2_{j+1}})\}$. On a $\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) \leq k^2_{s_2+1}(i).r^2_{s_2+1}$.*

Démonstration Voir lemme 2.3.11.

Théorème 2.3.18 *I) Si $c < \frac{m^1_1}{n^1}$ ou $\frac{m^2_1}{n^2}$ alors*

$$\beta(i) = \max\{(n^1+n^2)i, k^1_a(i)(r^1_a + \frac{int(f_1,f_2)}{d^1_a}), \theta^1(i,a) + [\frac{i}{m^1_a}].\frac{int(f_1,f_2)}{d^1_a} | a \leq h_1,$$

$$k^2_a(i)(r^2_a + \frac{int(f_1,f_2)}{d^2_a}), \theta^2(i,a) + [\frac{i}{m^2_a}].\frac{int(f_1,f_2)}{d^2_a} | a \leq h_2\}$$

II) Sinon, soit q le plus grand entier tel que $\frac{m^1_q}{n^1} = \frac{m^2_q}{n^2} < c$ et soit pour $j = 1,2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \frac{m^j_{q+1}}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

$$\beta(i) = \max\{(n^1+n^2)i, k^1_a(i)(r^1_a + r^2_a), \theta^1(i,a) + \frac{n^2}{n^1}.\theta^1(i,a), \theta^2(i,a) + \frac{n^1}{n^2}.\theta^2(i,a) | a \leq q,$$

$$k^1_a(i)(r^1_a + \frac{int(f_1,f_2)}{d^1_a}), \theta^1(i,a) + [\frac{i}{m^1_a}].\frac{int(f_1,f_2)}{d^1_a} | L_1 < a \leq h_1,$$

$$k^2_a(i)(r^2_a + \frac{int(f_1,f_2)}{d^2_a}), \theta^2(i,a) + [\frac{i}{m^2_a}].\frac{int(f_1,f_2)}{d^2_a} | L_2 < a \leq h_2\}$$

Démonstration On démontre II, la démonstration de I étant similaire. Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ tel que $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i$. On pose $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$ où $\bar{\phi}(t)$ est une représentation primitive de $\phi(t)$, soit g le polynôme unitaire irréductible tel que $g(\bar{\phi}(t)) = 0$. Posons $c(f_l, g) = c_l, l = 1,2$.

Soit $s_1 = \max\{0 \leq j \leq h_1 | m \simeq 0(\frac{n^1}{d^1_{j+1}})\}, s_2 = \max\{0 \leq j \leq h_2 | m \simeq 0(\frac{n^2}{d^2_{j+1}})\}$. Par le lemme 2.3.11. et le lemme 2.3.17., $k.int(f_1, g) \leq k^1_{s_1+1}(i).r^1_{s_1+1}$ et $k.int(f_2, g) \leq k^2_{s_2+1}(i)r^2_{s_2+1}$.

D'après le corollaire 2.3.16., trois cas sont possibles :

1^{er} cas) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$. Ici $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq (n^1+n^2).i$ et on a l'égalité si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (0, t^i)$.

$2^{\text{ème}}$ cas) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, n^1 ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$. Dans ce cas, soit n^2 ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$ soit $n^2 | \mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_2 = c(f_2, \phi) \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$. D'autre part, par la remarque 2.3.2., on a trois possibilités :

1) $int(f_1, g) < \frac{m}{n^2} int(f_1, f_2)$, dans ce cas, $\frac{int(f_1,g)}{n^1} = \frac{int(f_2,g)}{n^2}$:

$\diamond$ Si $s_1+1 \leq q$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^1_{s_1+1}(i).r^1_{s_1+1}(1+\frac{n^2}{n^1})$. Si

$$\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{k^1_{s_1+1}(i).\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{k^1_{s_1+1}(i)}))$$

alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k^1_{s_1+1}(i).r^1_{s_1+1}(1+\frac{n^2}{n^1}) = k^1_{s_1+1}(i)(r^1_{s_1+1}+r^2_{s_1+1})$.

$\diamond$ Si $s_1+1>q$, alors $\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^1_{s_1+1}(i).(r^1_{s_1+1}+\frac{int(f_1,f_2)}{d^1_{s_1+1}})$. On a l'égalité si $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{k^1_{s_1+1}(i).\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{k^1_{s_1+1}(i)}))$.

2) $int(f_1,g) > \frac{m}{n^2} int(f_1,f_2)$. Dans ce cas :

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_1,g)+\frac{m}{n^1}.int(f_1,f_2))$$

$$\leq k^1_{s_1+1}(i)(r^1_{s_1+1}(i)+\frac{int(f_1,f_2)}{d^1_{s_1+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{k^1_{s_1+1}(i).\frac{n^1}{d^1_{s_1+1}}}, y^1_{<m^1_{s_1+1}}(t^{k^1_{s_1+1}(i)}))$.

3) $int(f_1,g) = \frac{m}{n^2} int(f_1,f_2)$:

$\diamond$ Si n^2 ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$, alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_2,g)+\frac{m}{n^2}.int(f_1,f_2))$$

$$\leq k^2_{s_2+1}(i).(r^2_{s_2+1}+\frac{int(f_1,f_2)}{d^2_{s_2+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{k^2_{s_2+1}(i).\frac{n^2}{d^2_{s_2+1}}}, y^2_{<m^2_{s_2+1}}(t^{k^2_{s_2+1}(i)}))$.

$\diamond$ Si $n^2|\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c(f_2,\phi)=c_2 \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$, écrivons $\phi(t)=(t^{n^2p},\phi_2(t))=(t^{mk},\theta(t^k))$ où $(t^m,\theta(t))$ est primitive.

Soit a l'unique entier tel que $m^2_a \leq \frac{i}{p} < m^2_{a+1}$, en particulier $[\frac{i}{m^2_{a+1}}]+1 \leq p \leq [\frac{i}{m^2_a}]$. On a :

$$\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) = \frac{km}{n^2}(r^2_{q'}d^2_{q'}+(n^2c_2-m^2_{q'})d^1_{q'+1})$$

où $\frac{m^2_{q'}}{n^2} \leq c_2 < \frac{m^2_{q'+1}}{n^2}$. Comme $c_2 \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$ alors $q' \leq a$.

Si $q'<a$, alors

$$\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) \leq \frac{km}{n^2}(r^2_a d^2_a + ({m^2}_{a+1}-{m^2}_a)d^2_{a+1})$$

$$= p.(r_a^2 d_a^2 - m^2{}_a d_{a+1}^2) + p.m^2{}_{a+1} d_{a+1}^2$$
$$\leq \theta^2(i,a).$$

Si $q' = a$, alors $\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) \leq \theta^2(i,a)$.
Pour avoir l'égalité, on pose

$$\tilde{\phi}(t) = (t^{n^2\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j,\tilde{p}j<i} c_j^2 t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

Où $\tilde{p} = [\frac{i}{m_a^2}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$. Sous ces conditions on a $c_2 = \frac{i}{n^2\tilde{p}}$. Par conséquent $\mathrm{O}_t(f_2(\tilde{\phi})) = \theta^2(i,a)$ et $\mathrm{O}_t(f_1(\tilde{\phi})) = [\frac{i}{m_a^2}].\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^2}$.

3ème cas) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, $n^1|\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_1 = c(f_1,\phi) \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$. Dans ce cas soit n^2 ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$, soit $n^2|\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_2 = c(f_2,\phi) \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$. D'autre part, par la remarque 2.3.2., on a trois cas :

1) $int(f_1,g) < \frac{m}{n^2}.int(f_1,f_2)$: dans ce cas $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.int(f_1,g)(1+\frac{n^2}{n^1})$. Ecrivons $\phi(t) = (t^{n^1p}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k))$ où $(t^m, \theta(t))$ est primitive.
Soit a l'unique entier tel que $m_a^1 \leq \frac{i}{p} < m_{a+1}^1$, donc $[\frac{i}{m_{a+1}^1}] + 1 \leq p \leq [\frac{i}{m_a^1}]$. On a :
$\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) = \frac{km}{n^1}(r_{q'}^1 d_{q'}^1 + (n^1c_1 - m_{q'}^1)d_{q'+1}^1)$ où $\frac{m_{q'}^1}{n^1} \leq c_1 < \frac{m_{q'+1}^1}{n^1}$. Mais $c_1 \leq \frac{i}{\mathrm{O}_t(\phi)}$, alors $q' \leq a$.
Si $q' < a$, alors

$$\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) \leq \frac{km}{n^1}(r_a^1 d_a^1 + (m^1{}_{a+1} - m^1{}_a)d_{a+1}^1)$$
$$= p.(r_a^1 d_a^1 - m^1{}_a d_{a+1}^1) + p.m^1{}_{a+1} d_{a+1}^1$$
$$\leq \theta^1(i,a).$$

Si $q' = a$, alors $\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) \leq \theta^1(i,a)$.
Pour avoir l'égalité on pose

$$\tilde{\phi}(t) = (t^{n^1\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j,\tilde{p}j<i} c_j^1 t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

Où $\tilde{p} = [\frac{i}{m_a^1}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$. Sous ces conditions on a $c_1 = \frac{i}{n^1\tilde{p}}$. Par conséquent $\mathrm{O}_t(f_1(\tilde{\phi})) = \theta^1(i,a)$, et par le lemme 2.3.1. $\mathrm{O}_t(f_2(\tilde{\phi})) = \frac{n^2}{n^1}.\theta^1(i,a)$.

2) $int(f_1,g) > \frac{m}{n^2}.int(f_1,f_2)$: dans ce cas $\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_1,g) + \frac{m}{n^1}.int(f_1,f_2))$. En appliquant le même argument que dans le troisième cas, partie 1) on obtient $\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) = \theta^1(i,a)$ et $\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) = [\frac{i}{m_a^1}].\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^1}$.

3) $int(f_1, g) = \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2)$:

◇ Si n^2 ne divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$, alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(int(f_2, g) + \frac{m}{n^2}.int(f_1, f_2))$$

$$\leq k^2_{s_2+1}(i).(r^2_{s_2+1} + \frac{int(f_1, f_2)}{d^2_{s_2+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^2_{s_2+1}.\frac{n^2}{d^2_{s_2+1}}}, y^2_{<m^2_{s_2+1}}(t^{k^2_{s_2+1}}))$.

◇ Si $n^2|\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_2 = c(f_2, \phi) \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$, écrivons $\phi(t) = (t^{n^2 p}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k))$ où $(t^m, \theta(t))$ est primitive.

Soit a l'unique entier tel que $m^2_a \leq \frac{i}{p} < m^2_{a+1}$, en particulier $[\frac{i}{m^2_{a+1}}] + 1 \leq p \leq [\frac{i}{m^2_a}]$. On a :

$\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) = \frac{km}{n^2}(r^2_{q'}d^2_{q'} + (n^2c_2 - m^2_{q'})d^1_{q'+1})$ où $\frac{m^2_{q'}}{n^2} \leq c_2 < \frac{m^1_{q'+1}}{n^1}$. Mais $c_2 \leq \frac{i}{\mathrm{O}_t(\phi)}$, alors $q' \leq a$.

Si $q' < a$, alors

$$\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) \leq \frac{km}{n^2}(r^2_a d^2_a + ({m^2}_{a+1} - {m^2}_a)d^2_{a+1})$$

$$= p.(r^2_a d^2_a - {m^2}_a d^2_{a+1}) + p.{m^2}_{a+1}d^2_{a+1}$$

$$\leq \theta^2(i, a).$$

Si $q' = a$, $\mathrm{O}_t(f_2(\phi)) \leq \theta^2(i, a)$.

Pour avoir l'égalité on pose

$$\tilde{\phi}(t) = (t^{n^2\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j, \tilde{p}j < i} c^2_j t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

Où $\tilde{p} = [\frac{i}{m^2_a}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$. Sous ces conditions on a $c_2 = \frac{i}{n^2\tilde{p}}$. Par conséquent $\mathrm{O}_t(f_2(\tilde{\phi})) = \theta^2(i, a)$ et $\mathrm{O}_t(f_1(\tilde{\phi})) = [\frac{i}{m^2_a}].\frac{int(f_1, f_2)}{d^2_a}$.

2.3.2 Calcul de $\beta(i)$ si $n^1 = n^2$

On suppose dans cette partie que $n^1 = n^2$.

Calcul de $\beta(i)$ pour $i < n^1$

Soit q_1 (resp. q_2) l'unique entier tel que $\frac{n^1}{d^1_{q_1}} \leq i < \frac{n^1}{d^1_{q_1+1}}$ (resp. $\frac{n^2}{d^2_{q_2}} \leq i < \frac{n^2}{d^2_{q_2+1}}$). Avec ces notations on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.19 *I) Si* $c < \frac{m_1^1}{n^1}$ *ou* $\frac{m_1^2}{n^2}$ *alors*

$$\beta(i) = \max\{(r_a^1 + \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1}).[\frac{id_a^1}{n^1}] | a \leq q_1, (r_a^2 + \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2}).[\frac{id_a^2}{n^2}] | a \leq q_2\}.$$

II) Sinon soit q *le plus grand entier tel que* $\frac{m_q^1}{n^1} = \frac{m_q^2}{n^2} < c$. *On pose pour* $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c_j \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

i) Si $q < q_1$, *alors*

$$\beta(i) = \max\{(r_a^1 + r_a^2).[\frac{id_a^1}{n^1}] | a \leq q, (r_a^1 + \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1}).[\frac{id_a^1}{n^1}] | L_1 < a \leq q_1, (r_a^2 + \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2}).[\frac{id_a^2}{n^2}] | L_2 < a \leq q_2\}.$$

ii) Si $q_1 \leq q$, *alors* $q_1 = q_2$ *et* $\beta(i) = \max\{(r_a^1 + r_a^2).[\frac{id_a^1}{n^1}] | a \leq q_1\}$.

Démonstration Voir théorème 2.3.6.

Remarque 2.3.20 *Avec les mêmes notations de cette partie remarquons que dans le théorème 2.3.19, l'ensemble* $\{(\mathrm{O}_t(f_1(\phi(t))), \mathrm{O}_t(f_2(\phi(t)))\}$ *contient les maximaux irréductibles du semi-groupe de* f *pour* $i \leq \max\{\frac{n^1}{d_{h_1}^1}, \frac{n^2}{d_{h_2}^2}\}$.

Calcul de $\beta(i)$ pour $i \geq n^1$

Théorème 2.3.21 *I) Si* $c < \frac{m_1^1}{n^1}$ *ou* $\frac{m_1^2}{n^2}$ *alors*

$$\beta(i) = \max\{(n^1 + n^2)i, k_a^1(i)(r_a^1 + \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1}), \theta^1(i, a) + [\frac{i}{m_a^1}].\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^1} | a \leq h_1$$

$$k_a^2(i)(r_a^2 + \frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2}), \theta^2(i, a) + [\frac{i}{m_a^2}].\frac{int(f_1, f_2)}{d_a^2} | a \leq h_2\}$$

II) Sinon, soit q *le plus grand entier* $\frac{m_q^1}{n^1} = \frac{m_q^2}{n^2} < c$. *On pose pour* $j = 1, 2$

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c_j \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon \end{cases}$$

$$\beta(i) = \max\{(n^1 + n^2)i, k_a^1(i)(r_a^1 + r_a^2), \theta^1(i, a) + \frac{n^2}{n^1}.\theta^1(i, a), \theta^2(i, a) + \frac{n^1}{n^2}.\theta^2(i, a) | a \leq q$$

$$k_a^1(i)(r_a^1+\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^1}),\theta^1(i,a)+[\frac{i}{m_a^1}].\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^1}|L_1<a\leq h_1$$

$$k_a^2(i)(r_a^2+\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^2}),\theta^2(i,a)+[\frac{i}{m_a^2}].\frac{int(f_1,f_2)}{d_a^2}|L_2<a\leq h_2\}$$

Démonstration Voir théorème 2.3.18.

2.3.3 La classe d'équisingularité de f

Soit G et g deux polynômes unitaires de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Supposons que $G=G_1.G_2$ et $g=g_1.g_2$ avec G_1,G_2,g_1 et g_2 sont irréductibles dans $\mathbf{K}[[x]][y]$. Rappelons que G et g sont dits équisinguliers si
1) Pour $i=1,2$, G_i et g_i sont équisinguliers.
2) $c(G_1,G_2)=c(g_1,g_2)$.

et que la classe d'équisingularité de $g=g_1.g_2\in\mathbf{K}[[x]][y]$ est donnée par l'ensemble suivant :

$$\{G\in\mathbf{K}[[x]][y]|\text{ G et g sont équisinguliers }\}.$$

Théorème 2.3.22 *Les notations sont celles de ci-dessus. Si g et h sont équisinguliers alors g et h ont la même fonction d'Artin-Greenberg.*

Démonstration En effet, on peut vérifier que dans les formules donnant la fonction d'Artin-Greenberg de f, les expressions sont des invariantes de la classe d'équisingularité de f

Remarque 2.3.23 *Deux polynômes $f=f_1.f_2, g=g_1.g_2$ équisinguliers ont la même fonction d'Artin-Greenberg, mais deux polynômes non équisinguliers peuvent avoir la même fonction d'Artin-Greenberg.*

Soit $f=f_1.f_2=(y^2-x^3).[(y^2-x^3)^2-x^5y]$, et $g=g_1.g_2=(y^2-x^3).[(y^2-x^3)^2-x^7y]$. Les formules des théorèmes 2.3.6, 2.3.12., et 2.3.18. montrent que la fonction d'Artin-Greenberg de f et celle de g sont les mêmes, en particulier pour $i<n^2$ la fonction d'Artin-Greenberg de f et de g est $\beta(i)=max\{9i,\theta^1(i,0),\theta^1(i,1)\}$ où

$$\theta^1(i,0)=\begin{cases}2.i & Si\ [\frac{i}{3}]<[\frac{i}{2}]\\ 0 & sinon\end{cases}$$

$$\theta^1(i,1)=\begin{cases}3.[\frac{i}{3}]+i & Si\ 0<[\frac{i}{3}]\\ 0 & sinon\end{cases}$$

et pour $i\geq n^2$, celles-ci sont données par

$$\beta_f(i)=\max\{6i,9k_1^1(i),3.\theta^1(i,0),3.\theta^1(i,1),\frac{3}{2}.\theta^2(i,0),\frac{3}{2}.\theta^2(i,1)\}$$

et celle de g est

$$\beta_g(i) = max\{6i, 9k_1^1(i), 3.\theta^1(i,0), 3.\theta^1(i,1), \frac{3}{2}.\theta^3(i,0), \frac{3}{2}.\theta^3(i,1)\}$$

avec

$$k_1^1(i) = \begin{cases} i & Si\ i \not\equiv 0(mod 2) \\ i-1 & sinon \end{cases}$$

$$\theta^1(i,0) = \begin{cases} 2i & Si\ [\frac{i}{3}] < [\frac{i}{2}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\theta^1(i,1) = \begin{cases} 3.[\frac{i}{3}] + i & Si\ 0 < [\frac{i}{3}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\theta^2(i,0) = \begin{cases} 4i & Si\ [\frac{i}{6}] < [\frac{i}{4}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\theta^2(i,1) = \begin{cases} 12.[\frac{i}{6}] + 2.i & Si\ [\frac{i}{7}] < [\frac{i}{6}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\theta^3(i,0) = \begin{cases} 4i & Si\ [\frac{i}{6}] < [\frac{i}{4}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\theta^3(i,1) = \begin{cases} 12.[\frac{i}{6}] + 2.i & Si\ [\frac{i}{11}] < [\frac{i}{6}] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On vérifie que pour $i \geq n^2$ $\beta_f(i) = \beta_g(i) = 9k_1^1(i)$.

2.4 La fonction d'Artin-Greenberg d'une courbe plane à plusieurs branches

On suppose dans cette section que $s > 2$. Soit

$$f = \prod_{k=1}^{s} f_k$$

la décomposition de f en polynômes irréductibles et soit n^k le degré en y de $f_k, k = 1, \dots, s$. Supposons sans perte de généralité que $n^k \leq n^{k+1}$.

On utilise les notations suivantes : soit $y_i^k(t), i = 1, \ldots, n^k$, les racines de $f_k(t^{n^k}, y), k = 1, \ldots, s$. On associe à $f_k, k = 1, \ldots, s$ les suites caractéristiques $(m_i^k)_{0\leq i\leq h_k}, (d_i^k)_{0\leq i\leq h_k+1}, (r_i^k)_{0\leq i\leq h_k}$ définies comme dans le premier chapitre.

Posons $y_1^k(t) = \sum c_j^k.t^j$ et soit $y^k_{<m_a^k}(t) = \sum_{j<m_a^k} c_j^k t^{\frac{j}{d_a^k}}$, $\phi_a^k = (t^{\frac{n^k}{d_a^k}}, y^k_{<m_a^k}(t))$. On pose g_a^k le polynôme minimal de $y^k_{<m_a^k}(x^{\frac{d_a^k}{n^k}})$ sur $\mathbf{K}((x))$, on a $deg_y(g_a^k) = \dfrac{n^k}{d_a^k}$, $c(f_k, g_a^k) = \dfrac{m_a^k}{n^k}$, et $int(f_k, g_a^k) = r_a^k$.

On pose c_{jk} le contact de f_j avec f_k, $1 \leq j \neq k \leq s$.

Soit $g = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \ldots + b_m(x)$ un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$. Soit $c_j = c(f_j, g), j = 1, \ldots, s$ et considérons l'arbre des contacts de $f.g$. Soit

$$M = \max\{c_j | 1 \leq j \leq s\}$$

et soit $l \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $M = c(f_l, g)$. On pose $Q(M)$ la classe d'équivalence de $R(M)$ contenant f_l. Notons que si $f_p \in Q(M)$ alors $c_p = M$.

Soit $c = \min\{c_{kj} | 1 \leq j \neq k \leq s\}$. Avec ces notations on a les propositions suivantes :

Proposition 2.4.1 *Si $M \leq c$, alors $int(f_k, g) = \dfrac{n^k}{n^l} int(f_l, g)$, $1 \leq k \leq s$.*

Démonstration Voir prop.1.3.3.

Proposition 2.4.2 *Si $M > c$, alors :*

i) Pour $f_k \in Q(M)$, $int(f_k, g) = \dfrac{n^k}{n^l} int(f_l, g)$

ii) Pour $f_k \notin Q(M)$ $int(f_k, g) = \dfrac{m}{n^l}.int(f_k, f_l)$

Démonstration Voir prop.1.3.4.

Soit $T(f)$ l'arbre des contacts de f et soit P un point de $T(f)$:

Définition 2.4.3 *Soit $f_l \in Q(P)$, on définit $Q'(P, l) \subseteq Q(P)$ par :*

$$\begin{cases} f_k \in Q'(P,l) \text{ si et seulement si } c(f_k, f_l) > P \\ f_k \notin Q'(P,l) \text{ si et seulement si } c(f_k, f_l) < P. \text{ On note également } f_k \in \bar{Q}'(P,l). \end{cases}$$

Remarquons que $Q'(P,l) \cup \bar{Q}'(P,l) \subseteq \{1, \ldots, s\}$ mais on peut ne pas avoir l'égalité. Notons :

$$B = \{(P,l) \text{ tel que } Q'(P,l) \cup \bar{Q}'(P,l) = \{1, \ldots, s\}\}.$$

Soit $\Gamma(f)$ le semi-groupe de f et $MAI(f)$ l'ensemble des maximaux absolus irréductibles de $\Gamma(f)$ et rappelons que cet ensemble est caractérisé comme suit :

Proposition 2.4.4 *Soit $1 \leq j \leq s$ et $1 \leq a \leq h_j$ tel que $(\frac{m_a^j}{n^j}, j) \in B$ et posons :*

$$\gamma_k^{a,j} = \begin{cases} \frac{n^k}{n^j} r_a^j = r_a^k & si\ f_k \in Q'(\frac{m_a^j}{n^j}, j) \\ \frac{int(f_k, f_j)}{d_a^j} & sinon \end{cases}$$

et $\gamma^{a,j} = (\gamma_1^{a,j}, \ldots, \gamma_s^{a,j})$.

I) S'il existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c < \frac{m_1^i}{n^1}$ alors l'ensemble des maximaux absolus irréductibles de $\Gamma(f)$ est donné par :

$$MAI(f) = \bigcup_{j=1}^{s} \{\gamma^{1,j}, \ldots, \gamma^{h_j,j}\}$$

II) Sinon, soit q le plus grand entier tel que $\frac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \frac{m_q^s}{n^s} < c$. On note pour $j \in 1, \ldots, s$, $q < h_j$:

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon. \end{cases}$$

Soit $A = \{j, L_j < h_j\}$. Dans ce cas l'ensemble des maximaux absolus irréductibles est donné par :

$$MAI(f) = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^q\} \bigcup \bigcup_{j \in A} \{\gamma^{L_j+1,j}, \ldots \gamma^{h_j,j}\}$$

où $\alpha^a = (r_a^1, \ldots, r_a^s), a = 1, \ldots, q$.

Lemme 2.4.5 *Soit $i \in \mathbb{N}$, $i < n^j$, $1 \leq j \leq s$, et soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$. On a $\phi \not\cong^i f_j$ si et seulement si $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i$.*

Démonstration Voir lemme 2.3.4.

Pour calculer la fonction d'Artin, on va supposer sans perte de généralité que les degrés des composantes irréductibles de f sont ordonnés comme suit : Soit $\{N^1, \ldots, N^r\} = \{n^1, \ldots, n^s\}$, tel que $N^1 < \ldots < N^r$. Pour tout $k \leq r$, soit

$$E_k = \{j, j = 1, \ldots s, f_j \text{ est de degré } \leq N^k \text{ en } y\}.$$

Rappelons de plus que $\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t(f(\phi)), \phi \not\cong^i f\}$. Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\phi \not\cong^i f$. On pose $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$, où $\bar{\phi}$ est une représentation primitive de ϕ. Dans ce cas,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k. \sum_{j=1}^{s} int(f_j, g)$$

où g est le polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $g(\bar{\phi}(t)) = 0$ et soit $deg_y(g) = m$.

◇ Si $deg_y(g) < mult_0(g)$ alors $\mathrm{O}_t(f(\phi) \leq ni$.

◇ Sinon, le calcul de $\beta(i)$ peut être décrit à l'aide de l'arbre des contacts de f de la façon suivante : soit

$$M = \max\{c(f_j, g) | 1 \leq j \leq s\}$$

et soit $l \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $M = c(f_l, g)$.

$$\begin{cases} \text{Si } M < c \text{ alors } \mathrm{O}_t(f(\phi) = k.\sum_{j=1}^{s} int(f_l, g).\dfrac{n^j}{n^l} & \text{Voir fig.2} \\ \text{Si } M \geq c \text{ alors } \mathrm{O}_t(f(\phi) = k.(\sum_{f_j \in Q(M)} int(f_l, g).\dfrac{n^j}{n^l} + \sum_{f_j \notin Q(M)} int(f_j, f_l).\dfrac{m}{n^l}) & \text{Voir fig.3} \end{cases}$$

L'idée utilisée dans les démonstrations des théorèmes prinicipaux serait de faire varier g de façon que $\phi \ncong^i f$ dans tous les cas. Dans ce qui suit on présente l'arbre des contacts de f dans la figure 1, de $f.g$ où $c(f_l, g) < c$ (figure 2), et celle de $f.g$ où $c(f_l, g) \geq c$ (figure 3).

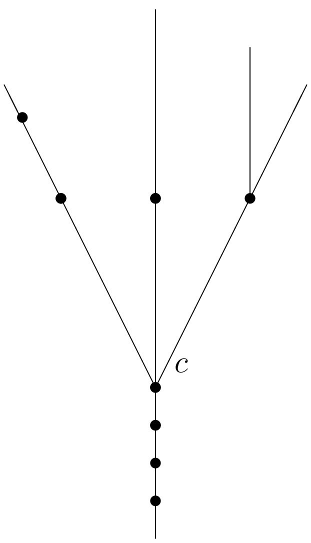


fig.1

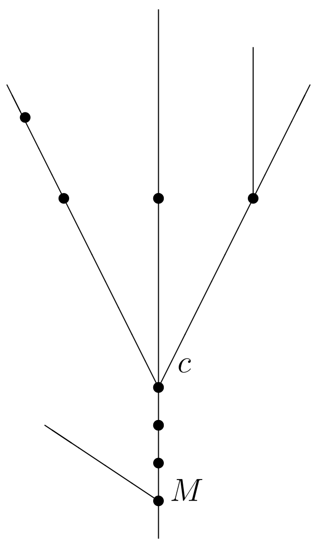


fig.2

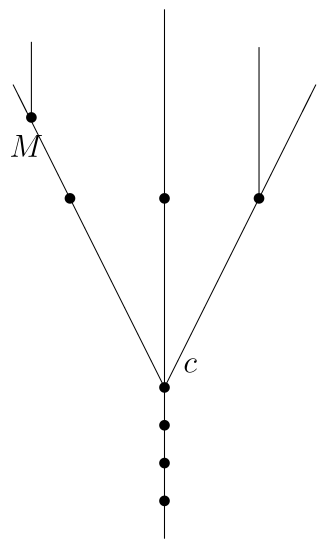


fig.3

Lemme 2.4.6 *Soit $i \in \mathbb{N}$, $i < N^j$. Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) = mk \leq i$, et soit $u \notin E_j$ i.e. $n^u > N^j$. Soit $s_u = \max\{0 \leq j \leq h_u | m \simeq 0(\dfrac{n^u}{d^u_{j+1}})\}$. On a $k.int(f_u, g) \leq [\dfrac{id^u_{s_u+1}}{n^u}].r^u_{s_u+1}$.*

Démonstration Voir lemme 2.3.5.

Lemme 2.4.7 *Soit $i \in \mathbb{N}$, $N^j \leq i < N^{j+1}$, on a*

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t(f(\phi(t)) | \phi \ncong^i f_k, k \in E_j, \mathrm{ord}_t(\phi(t)) \leq i\}.$$

Démonstration Voir lemme 2.3.8.

Lemme 2.4.8 *Soit* $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ *et* $i \in \mathbb{N}, n^j \leq i$. *On a :* $\phi \cong^i f_j$ *si et seulement si* $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n^j$ *divise* $\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_j, \phi) > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

Démonstration Voir lemme 2.3.9.

Corollaire 2.4.9 *Soit* $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbf{K}[[t]]^2, \mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$, *et soit* $i \in \mathbb{N}, n^j \leq i$. *Pour calculer* $\beta(i)$, *il faut étudier* $\mathrm{O}_t(f(\phi))$ *lorsque* ϕ *vérifie l'une des conditions suivantes :*
1) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$.
2) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, $n^k, k = 1, \ldots, j$ *ne divise pas* $\mathrm{ord}_t(\phi)$.
3) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, $n^k|\mathrm{ord}_t(\phi)$ *et* $c(f_k, \phi) \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}, k = 1, \ldots, j$.

Soit $j \in \{1, \ldots, s\}$, $a \in \{1, \ldots, h_j\}$ on pose

$$k_a^j(i) = \begin{cases} [\frac{id_a^j}{n^j}] & \text{si } [\frac{id_a^j}{n^j}] \not\simeq 0 \bmod d_a^j \\ [\frac{id_a^j}{n^j}] - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta^j(i,a) = \begin{cases} [\frac{i}{m_a^j}](r_a^j d_a^j - m_a^j.d_{a+1}^j) + id_{a+1}^j & \text{si } [\dfrac{i}{m_{a+1}^j}] < [\dfrac{i}{m_a^j}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) = mk \leq i$. Supposons que $\phi(t) = \bar{\phi}(t^k)$, où $\bar{\phi(t)}$ est une représentation primitive de $\phi(t)$. Soit g le polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $g(\phi(t)) = 0$. Soit $s_u = \max\{0 \leq j \leq h_u | m \simeq 0(\dfrac{n^u}{d_{j+1}^u})\}$.
Avec ces notations on a le lemme suivant :

Lemme 2.4.10 *Soit* $i \in \mathbb{N}, i \geq N^j$. *Soit* $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$, $\mathrm{ord}_t(\phi(t)) = mk$ *et soit* $u \in E_j$ *tel que* n^u *ne divise pas* km. *On a* $\mathrm{O}_t(f_u(\phi)) \leq k_{s_u+1}^u(i).r_{s_u+1}^u$.

Démonstration Voir lemme 2.3.11.

2.4.1 Calcul de $\beta(i)$ pour $i < N^1$

Soit $q_j, j = 1, \ldots, s$ l'unique entier, tel que $\dfrac{n^j}{d_{q_j}^j} \leq i < \dfrac{n^j}{d_{q_j+1}^j}$. Avec ces notations on a le théorème suivant :

Théorème 2.4.11 *I) S'il existe* $j \in \{1, \ldots, s\}$ *tel que* $c < \dfrac{m_1^j}{n^j}$ *alors*

$$\beta(i) = \max\{[\frac{id_a^l}{n^l}].(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l}) | a \leq q_l, l = 1 \ldots, s, (\frac{m_a^l}{n^l}, l) \in B.\}$$

II) Sinon soit q le plus grand entier tel que $\frac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \frac{m_q^s}{n^s} < c$. On note pour $j \in 1, \ldots, s$, $q < h_j$:

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \frac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon. \end{cases}$$

Soit $A = \{j, L_j < h_j\}$:
i) Si $q < q_v, v = 1, \ldots, s$, alors

$$\beta(i) = \max\{[\frac{id_a^1}{n^1}].\sum_{j=1}^{s} r_a^j | a \leq q; [\frac{id_a^l}{n^l}].(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l}) | L_l < a \leq q_l,$$

$$l \in A, (\frac{m_a^l}{n^l}, l) \in B.\}$$

ii) S'il existe $v \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $q_v \leq q$, alors

$$\beta(i) = \max\{[\frac{id_a^1}{n^1}].\sum_{j=1}^{s} r_a^j | a \leq q_1\}$$

Démonstration On démontre II), la démonstration de I) étant similaire. On a

$$\beta(i) = \max\{k.\mathrm{O}_t(f(\phi)) | k.\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i \text{ et } \phi \text{ élément primitif de } \mathbf{K}[[t]]^2\}.$$

Soit $\phi(t)$ un élément primitif de $\mathbf{K}[[t]]^2$ d'ordre m, et soit g le polynôme unitaire irréductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$ tel que $g(\phi) = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k.\mathrm{ord}_t(\phi) \leq i$. On a

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \sum_{j=1}^{s} int(f_j, g).$$

On pose $c_j = c(f_j, g)$. Comme $\frac{n^j}{d_{q_j}^j} \leq i < \frac{n^j}{d_{q_j+1}^j}$ alors $c_j \leq \frac{m_{q_j}^j}{n^j}$.
Soit $M = \max\{c(f_j, g), j = 1, \ldots, s\}$ et $c = \min\{c(f_j, f_p), \leq j \neq p \leq s\}$. Supposons que $M = c(f_l, g)$ pour $l \in \{1, \ldots, s\}$.
i) Supposons $q < q_1$. On pose $s_j = \max\{0 \leq p \leq h_j | m \simeq 0(\frac{n^j}{d_{p+1}^j})\}$ pour $j = 1, \ldots, s$. On a les cas suivants :
1^{er} cas) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$ alors,

$$k.\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq \sum_{j=1}^{s} n^j.i$$

et on a l'égalité si $\phi(t) = (0, t^i)$.

$2^{\text{ème}}$ cas) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$. Supposons $\phi(t) = (t^m, y(t))$:

1) $M \leq c$ alors d'après la prop.2.4.1., $int(f_j, g) = \dfrac{n^j}{n^l}.int(f_l, g)$ pour tout $j \in \{1, \dots s\}$. D'autre part on a par le lemme 2.4.6. $k.int(f_l, g) \leq [\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}$.

$\diamond$ Si $s_l + 1 \leq q$, alors $k.int(f_j, g) \leq \dfrac{n^j}{n^l}[\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}$. Mais dans ce cas $\dfrac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} = r^j_{s_l+1}$. Par conséquent,

$$k.\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

Si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$ alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) = [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

$\diamond$ Si $s_l + 1 > q$ alors

$$\begin{cases} int(f_j, g) = \dfrac{n^j}{n^l} int(f_l, g) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ int(f_j, g) \leq \dfrac{m}{n^l}.int(f_j, f_l) & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Mais par le lemme 2.4.6., $k.int(f_l, g) \leq [\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}(i)$.

D'autre part, $\dfrac{km}{n^l} = \dfrac{kmd^l_{s_l+1}}{n^l}.\dfrac{1}{d^l_{s_l+1}} \leq [\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\dfrac{1}{d^l_{s_l+1}}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} k.\mathrm{O}_t(f(\phi)) &\leq (\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l} int(f_l, f_j)) \\ &\leq \sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}}) \\ &= [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}}). \end{aligned}$$

On a l'égalité si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$.

2) Si $M > c$ alors d'après la prop.2.4.2.,

$$k.\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l}.int(f_l, f_j)).$$

Par le lemme 2.4.6., on a $k.int(f_l,g) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s+1}$. De plus $\frac{km}{n^l} \leq \frac{1}{d^l_{s_l+1}}.[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]$. Par conséquent

$$k.\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].(\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$.
ii) Si $q_v \leq q$ avec $v \in \{1,\ldots,s\}$ alors $q_v = q_j$ pour tout $j \in \{1,\ldots,s\}$ et $c_j \leq M$ pour tout $j = 1,\ldots,s$ d'où le résultat de II.ii).

2.4.2 Calcul de $\beta(i)$ pour $N^1 \leq i < N^2$

Soit $q_j, j \notin E_1$ l'unique entier, tel que $\frac{n^j}{d^j_{q_j}} \leq i < \frac{n^j}{d^j_{q_j+1}}$. Avec ces notations on a le théorème suivant :

Théorème 2.4.12 *I) S'il existe $j \in \{1,\ldots,s\}$ tel que $c < \frac{m^j_1}{n^j}$ alors*

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i; k^l_a(i).(\sum_{f_j\in Q'(\frac{m^l_a}{n^l},l)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_a + \sum_{f_j\notin Q'(\frac{m^l_a}{n^l},l)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_a})|a \leq h_l, l \in E_1;$$

$$[\frac{id^l_a}{n^l}].(\sum_{f_j\in Q'(\frac{m^l_a}{n^l},l)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_a + \sum_{f_j\notin Q'(\frac{m^l_a}{n^l},l)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_a})|a \leq q_l, l \notin E_1;$$

$$\sum_{f_j\in Q'(\frac{m^l_a}{n^l},l)} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a) + \sum_{f_j\notin Q'(\frac{m^l_a}{n^l},l)} [\frac{i}{m^l_a}]\frac{int(f_j,f_l)}{d^l_a}|a \leq h_l, l \in E_1, (\frac{m^l_a}{n^l},l) \in B\}.$$

II) Sinon, soit q le plus grand entier tel que $\frac{m^1_q}{n^1} = \ldots = \frac{m^s_q}{n^s} < c$. On note pour $j \in 1,\ldots,s$, $q < h_j$:

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \frac{m^j_{q+1}}{n^j} \\ q+1 & sinon. \end{cases}$$

Soit $A = \{j, L_j < h_j\}$:
i) Si $q < q_v, v \notin E_1$, alors

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i; [\frac{id^l_a}{n^l}].\sum_{j=1}^{s}.r^j_a|a \leq q, l \notin E_1; \theta^l(i,a)\sum_{j=1}^{s}\frac{n^j}{n^l}|a \leq q, l \in E_1;$$

$$k_a^l(i).(\sum_{f_j\in Q'(\frac{m_a^l}{n^l},l)}\frac{n^j}{n^l}.r_a^l+\sum_{f_j\notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l},l)}\frac{int(f_l,f_j)}{d_a^l})|L_l<a\leq h_l, l\in E_1\cap A;$$

$$[\frac{id_a^l}{n^l}].(\sum_{f_j\in Q'(\frac{m_a^l}{n^l},l)}\frac{n^j}{n^l}.r_a^l+\sum_{f_j\notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l},l)}\frac{int(f_l,f_j)}{d_a^l})|L_l<a\leq q_l, l\notin E_1, l\in A;$$

$$\sum_{f_j\in Q'(\frac{m_a^l}{n^l},l)}\frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a)+\sum_{f_j\notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l},l)}[\frac{i}{m_a^l}]\frac{int(f_j,f_l)}{d_a^l}|L_l<a\leq h_l, l\in E_1\cap A,(\frac{m_a^l}{n^l},l)\in B\}.$$

ii) S'il existe $v\notin E_1$ tel que $q_v\leq q$, alors

$$\beta(i)=\max\{\sum_{j=1}^{s}n^j.i;[\frac{id_a^l}{n^l}].\sum_{j=1}^{s}.r_a^j|a\leq q_l, l\notin E_1;\theta^l(i,a)\sum_{j=1}^{s}\frac{n^j}{n^l}|a\leq q_l, l\in E_1(\frac{m_a^l}{n^l},l)\in B\}$$

Démonstration On démontre II) la démonstration de I) étant similaire. Rappelons que pour $N^1\leq i<N^2$,

$$\beta(i)=\max\{\mathrm{O}_t(f(\phi(t)))|\phi(t)\in\mathbf{K}[[t]]^2,\phi\not\cong^i f_j, j\in E_1,\mathrm{ord}_t(\phi)\leq i\}.$$

Soit $\phi(t)\in\mathbf{K}[[t]]^2$ d'ordre $mk\leq i$. Soit $\bar\phi(t)$ d'ordre m une représentation primitive de $\phi(t)$, et soit g le polynôme unitaire irréductible tel que $g(\bar\phi)=0$. On a

$$\mathrm{O}_t(f(\phi))=k\sum_{j=1}^{s}int(f_j,g).$$

On pose $c_j=c(f_j,g)$. Comme $\frac{n^j}{d_{q_j}^j}\leq i<\frac{n^j}{d_{q_j+1}^j}$ alors $c_j\leq\frac{m_{q_j}^j}{n^j}$ pour tout $j\notin E_1$.
Soit $M=\max\{c(f_j,g), j=1,\ldots,s\}$ et $c=\min\{c(f_j,f_p),1\leq j\neq p\leq s\}$.
i) Supposons $q<q_v, v\notin E_1$. On pose $s_j=\max\{0\leq p\leq h_j|m\simeq 0(\frac{n^j}{d_{p+1}^j})\}$ pour tout $j=1,\ldots,s$. D'après le corollaire 2.4.9. on a les cas suivants :
1^{er} cas) Si $\mathrm{ord}_t(\phi)<\mathrm{O}_t(\phi_1)$ alors,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi))\leq\sum_{j=1}^{s}n^j.i$$

et on a l'égalité si $\phi(t)=\tilde\phi(t)=(0,t^i)$.
$2^{\text{ème}}$ cas) Si $\mathrm{ord}_t(\phi)=\mathrm{O}_t(\phi_1)$. Supposons $\bar\phi(t)=(t^m,y(t))$:
Fixons $l\in\{1,\ldots,s\}$ avec $c(f_l,g)=M$, soit $l\in E_1$ et soit $l\notin E_1$.
Dans le cas où $l\notin E_1$:

1) Si $M \leq c$ alors d'après la prop.2.4.1., $int(f_j,g) = \frac{n^j}{n^l}.int(f_l,g)$ pour tout $j \in \{1,\dots s\}$. D'autre part on a par le lemme 2.4.6. $k.int(f_l,g) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}$.

$\diamond$ Si $s_l+1 \leq q$, alors $k.int(f_j,g) \leq \frac{n^j}{n^l}[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}$. Mais dans ce cas $\frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} = r^j_{s_l+1}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$. Dans ce cas

$$\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) = [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

Notons que dans ce cas $[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}] = [\frac{id^j_{s_l+1}}{n^j}]$, $j \notin E_1$.

$\diamond$ Si $s_l+1 > q$ alors

$$\begin{cases} int(f_j,g) = \frac{n^j}{n^l}int(f_l,g) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ int(f_j,g) \leq \frac{m}{n^l}.int(f_j,f_l) & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Mais par le lemme 2.4.6., $k.int(f_l,g) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}(i)$. D'autre part, $\frac{km}{n^l} = \frac{kmd^l_{s_l+1}}{n^l}.\frac{1}{d^l_{s_l+1}} \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{1}{d^l_{s_l+1}}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_t(f(\phi)) &\leq k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l,g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l}int(f_l,f_j)) \\ &\leq \sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}}) \\ &= [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}}) \end{aligned}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$.

2) Si $M > c$ alors d'après la prop.2.4.2.,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l,g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l}.int(f_l,f_j)).$$

Par le lemme 2.4.6., on a $k.int(f_l, g) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s+1}$. De plus $\frac{km}{n^l} \leq \frac{1}{d^l_{s_l+1}}.[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]$. Par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}](\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$.
Dans le cas où $l \in E_1$ on a les possibilités suivantes :

cas 1) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$ et n^j ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$, $j \in E_1$.
Si $j = l$ on a les possibilités suivantes :

1) Si $M \leq c$, alors d'après la prop.2.4.1., $int(f_j, g) = \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g)$ pour tout $j \in \{1, \ldots s\}$, et par le lemme 2.4.10., $k.int(f_l, g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}$.

◇ Si $s_l + 1 \leq q$, alors $k.int(f_j, g) \leq \frac{n^j}{n^l}k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}$. Mais dans ce cas $\frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} = r^j_{s_l+1}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^l_{s_l+1}(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$. Dans ce cas,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) = k^l_{s_l+1}(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

◇ Si $s_l + 1 > q$ alors

$$\begin{cases} int(f_j, g) = \frac{n^j}{n^l} int(f_l, g) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ int(f_j, g) \leq \frac{m}{n^l}.int(f_j, f_l) & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Mais par le lemme 2.4.10., $k.int(f_l, g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}(i)$.
D'autre part, $\frac{km}{n^l} = \frac{k.md^l_{s_l+1}}{n^l}.\frac{1}{d^l_{s_l+1}} \leq k^l_{s_l+1}(i).\frac{1}{d^l_{s_l+1}}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l} int(f_l, f_j))$$

$$\leq \sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} k^l_{s_l+1}(i).\frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

$$= k^l_{s_l+1}(i).(\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$.

2) Si $M > c$ alors d'après la prop.2.4.2.,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l,g) + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{m}{n^l}.int(f_l,f_j))$$

Mais par le lemme 2.4.10., on a $k.int(f_l,g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s+1}$. De plus $\frac{km}{n^l} \leq \frac{1}{d^l_{s_l+1}}.k^l_{s_l+1}(i)$. Par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^l_{s_l+1}(i)(\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$.

Notons que pour $j \in E_1$, c_j peut prendre la valeur $\frac{m^j_{h_j}}{n^j}$, mais pour $j \notin E_1$, $c_j \leq \frac{m^j_{q_j}}{n^j}$.

Si $j \neq l$, alors :

cas 2) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n^l$ divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_l \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

1) Si $M \leq c$, on pose $\phi(t) = (t^{n^l p}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k)) | (t^m, \theta(t))$ est primitive.

Soit a l'unique entier tel que $m^l_a \leq \frac{i}{p} < m^l_{a+1}$, alors $[\frac{i}{m^l_{a+1}}] + 1 \leq p \leq [\frac{i}{m^l_a}]$. On a

$\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) = \frac{km}{n^l}(r^l_{q'}d^l_{q'} + (n^l c_l - m^l_{q'})d^1_{q'+1})$ avec $\frac{m^l_{q'}}{n^1} \leq c_l < \frac{m^l_{q'+1}}{n^l}$. Mais $c_l \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$ d'où $q' \leq a$.

Si $q' < a$, $\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) \leq \frac{km}{n^l}(r^l_a d^l_a + ({m^l}_{a+1} - {m^l}_a)d^l_{a+1}) = p.(r^l_a d^l_a - {m^l}_a d^l_{a+1}) + p.{m^l}_{a+1}d^l_{a+1} \leq \theta^l(i,a)$.

Si $q' = a$, $\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) \leq \theta^l(i,a)$.

L'égalité est atteinte si

$$\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{n^l.\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j,\tilde{p}j<i} c^l_j t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

où $\tilde{p} = [\frac{i}{m^l_a}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$.

Sous ces conditions on obtient $c_l = \dfrac{i}{n^l.\tilde{p}} = c_j, j = 1, \ldots, s$, et $\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) = \theta^l(i, a)$. Mais d'après la prop.2.4.1., $\mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = \dfrac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a)$, par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \theta^l(i, a).\sum_{j=1}^{s} \frac{n^j}{n^l}$$

2) Si $M > c$, avec les mêmes arguments que le deuxième cas 2), et si $M = cont(f_l, g)$, avec $l \in E_1$, on obtient d'après la prop. 2.4.2.

$$\begin{cases} \mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ \mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = [\frac{i}{m_a^l}]\dfrac{int(f_k, f_l)}{d_a^l} & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

En particulier,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \sum_{f_j \in Q(\frac{m_a^l}{n^l})} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a) + \sum_{f_j \notin Q(\frac{m_a^l}{n^l})} [\frac{i}{m_a^l}]\frac{int(f_j, f_l)}{d_a^l}.$$

ii) Si $q_v \leq q$ alors $q_v = q_j$ pour tout $j \notin E_1$, ainsi on obtient le résultat de II.ii).

2.4.3 Calcul de $\beta(i)$ pour $N^u \leq i < N^{u+1}$

Soit $q_j, j \notin E_u$ l'unique entier, tel que $\dfrac{n^j}{d_{q_j}^j} \leq i < \dfrac{n^j}{d_{q_j+1}^j}$. Avec ces notations on a le théorème suivant :

Théorème 2.4.13 *I) S'il existe $j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c < \dfrac{m_1^j}{n^j}$ alors*

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i, k_a^l(i).(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l})|a \leq h_l, l \in E_u;$$

$$[\frac{id_a^l}{n^l}].(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l})|a \leq q_l, l \notin E_u$$

$$\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a) + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} [\frac{i}{m_a^l}]\frac{int(f_j, f_l)}{d_a^l}|a \leq h_l, l \in E_u, (\frac{m_a^l}{n^l}, l) \in B\}$$

II) Sinon, soit q le plus grand entier tel que $\dfrac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \dfrac{m_q^s}{n^s} < c$. On note pour $j \in 1, \ldots, s$, $q < h_j$:

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \dfrac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & sinon. \end{cases}$$

Soit $A = \{j, L_j < h_j\}$ *:*
i) Si $q < q_v, v \notin E_u$*, alors*

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i, [\frac{id_a^l}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r_a^j | a \leq q, l \notin E_u; \theta^l(i,a).\sum_{j=1}^{s} \frac{n^j}{n^l} | a \leq q, l \in E_u;$$

$$k_a^l(i).(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l}) | L_l < a \leq h_l, l \in E_u \cap A;$$

$$[\frac{id_a^l}{n^l}].(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l}) | L_l < a \leq q_l, l \notin E_u, l \in A$$

$$\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a) + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} [\frac{i}{m_a^l}] \frac{int(f_j, f_l)}{d_a^l} | L_l < a \leq h_l, l \in E_u \cap A, (\frac{m_a^l}{n^l}, l) \in B\}$$

ii) S'il existe $v \notin E_u$ *tel que* $q_v \leq q$*, alors*

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i; [\frac{id_a^l}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r_a^j | a \leq q_l, l \notin E_u; \theta^l(i,a).\sum_{j=1}^{s} \frac{n^j}{n^l} | a \leq q_l, l \in E_u, (\frac{m_a^l}{n^l}, l) \in B\}.$$

Démonstration On démontre II), la démonstration de I) étant similaire. Rappelons que pour $N^u \leq i < N^{u+1}$,

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) | \phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2, \phi \not\cong^i f_j, j \in E_u, \mathrm{ord}_t(\phi) \leq i\}.$$

Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ d'ordre $km \leq i$. Soit $\bar{\phi}(t)$ une représentation primitive de $\phi(t)$ d'ordre m, et soit g le polynôme unitaire irréductible tel que $g(\bar{\phi}) = 0$. On a

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k \sum_{j=1}^{s} int(f_j, g)$$

On pose $c_j = c(f_j, g)$. Comme $\dfrac{n^j}{d_{q_j}^j} \leq i < \dfrac{n^j}{d_{q_j+1}^j}$ alors $c_j \leq \dfrac{m_{q_j}^j}{n^j}$ pour tout $j \notin E_u$.
Soit $M = \max\{c(f_j, g), j = 1, \ldots, s\}$ et $c = \min\{c(f_j, f_p), 1 \leq j \neq p \leq s\}$.

i) Supposons $q < q_v, v \notin E_u$. On pose $s_j = \max\{0 \leq p \leq h_j | m \simeq 0(\dfrac{n^j}{d_{p+1}^j})\}$ pour tout $j = 1, \ldots, s$. D'après le corollaire 2.4.9., on a les cas suivants :

1^{er} cas) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$ alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq \sum_{j=1}^{s} n^j.i$$

et on a l'égalité si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (0, t^i)$.

$2^{\text{ème}}$ cas) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$. Supposons $\bar{\phi}(t) = (t^m, y(t))$:
Soit $l \in \{1, \ldots, s\}$ avec $c_l = M$, soit $l \in E_u$ soit $l \notin E_u$.
Dans le cas où $l \notin E_u$:

1) Si $M \leq c$ alors d'après la prop.2.4.1., $int(f_j, g) = \dfrac{n^j}{n^l}.int(f_l, g)$ pour tout $j \in \{1, \ldots s\}$.
D'autre part, par le lemme 2.4.6., $k.int(f_l, g) \leq [\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}$.

$\diamond$ Si $s_l + 1 \leq q$, alors $k.int(f_j, g) \leq \dfrac{n^j}{n^l}[\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}$. Mais dans ce cas $\dfrac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} = r^j_{s_l+1}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$. On obtient alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) = [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

Notons que dans ce cas $[\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}] = [\dfrac{id^j_{s_l+1}}{n^j}]$, $j \notin E_u$.

$\diamond$ Si $s_l + 1 > q$ alors

$$\begin{cases} int(f_j, g) = \frac{n^j}{n^l} int(f_l, g) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ int(f_j, g) \leq \frac{m}{n^l}.int(f_j, f_l) & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Mais par le lemme 2.4.6., $k.int(f_l, g) \leq [\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1}(i)$. D'autre part, $\dfrac{km}{n^l} = \dfrac{kmd^l_{s_l+1}}{n^l}.\dfrac{1}{d^l_{s_l+1}} \leq [\dfrac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\dfrac{1}{d^l_{s_l+1}}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l} int(f_l, f_j))$$

$$\leq \sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

$$= [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].(\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$.

2) Si $M>c$ alors d'aprés la prop.2.4.2,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l,g) + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{m}{n^l}.int(f_l,f_j)).$$

Par le lemme 2.4.6., on a $k.int(f_l,g)\leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].r^l_{s+1}$. De plus $\frac{km}{n^l}\leq \frac{1}{d^l_{s_l+1}}.[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]$. Par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq [\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}](\sum_{f_j\in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j\notin Q(M)} \frac{int(f_l,f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}].\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{[\frac{id^l_{s_l+1}}{n^l}]}))$.

Dans le cas où $l\in E_u$ on a les possibilités suivantes :
cas 1) $\mathrm{O}_t(\phi)=\mathrm{O}_t(\phi_1)$, n^j ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi), j\in E_u$:
Si $j=l$, on a les possibilités suivantes :

1) Si $M\leq c$, alors d'après la prop.2.4.1., $int(f_j,g)=\frac{n^j}{n^l}.int(f_l,g)$ pour tout $j\in\{1,\dots s\}$, et par le lemme 2.4.10. $k.int(f_l,g)\leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}$.

⋄ Si $s_l+1\leq q$, alors $k.int(f_j,g)\leq \frac{n^j}{n^l}k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}$. Mais dans ce cas $\frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1}=r^j_{s_l+1}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^l_{s_l+1}(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

Si $\phi(t)=\tilde{\phi}(t)=(t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$ alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) = k^l_{s_l+1}(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

⋄ Si $s_l+1>q$ alors

$$\begin{cases} int(f_j,g)=\frac{n^j}{n^l}int(f_l,g) & \text{si } f_j\in Q(M)\\ int(f_j,g)\leq \frac{m}{n^l}.int(f_j,f_l) & \text{si } f_j\notin Q(M)\end{cases}$$

mais d'après 2.4.10., $k.int(f_l,g)\leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}(i)$.

D'autre part, $\frac{km}{n^l} = \frac{kmd^l_{s_l+1}}{n^l}.\frac{1}{d^l_{s_l+1}} \leq k^l_{s_l+1}(i).\frac{1}{d^l_{s_l+1}}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l} int(f_l, f_j))$$

$$\leq \sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} k^l_{s_l+1}(i).\frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}}$$

$$= k^l_{s_l+1}(i).(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$.
2) Si $M > c$ alors d'après la prop.2.4.2.,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l}.int(f_l, f_j))$$

Mais par le lemme 2.4.10., on a $k.int(f_l, g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s+1}$. D'autre part $\frac{km}{n^l} \leq \frac{1}{d^l_{s_l+1}}.k^l_{s_l+1}(i)$.
Par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^l_{s_l+1}(i)(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$.
Notons que pour $l \in E_u$, c_l peut prendre la valeur $\frac{m^l_{h_l}}{n^l}$, tandis que pour $l \notin E_u$, $c_l \leq \frac{m^l_{q_l}}{n^l}$
Si $j \neq l$ alors on a n^l divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$, et par conséquent on a le cas suivant :
cas 2) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n^l$ divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_l \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

1) Si $M \leq c$, soit $\phi(t) = (t^{n^l p}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k)) | (t^m, \theta(t))$ est irréductible.
Soit a l'entier unique tel que $m^l_a \leq \frac{i}{p} < m^l_{a+1}$, alors $[\frac{i}{m^l_{a+1}}] + 1 \leq p \leq [\frac{i}{m^l_a}]$.
$\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) = \frac{km}{n^l}(r^l_{q'} d^l_{q'} + (n^l c_l - m^l_{q'}) d^1_{q'+1})$ où $\frac{m^l_{q'}}{n^1} \leq c_l < \frac{m^l_{q'+1}}{n^l}$. Mais $c_l \leq \frac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$ alors $q' \leq a$.
Si $q' < a$, $\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) \leq \frac{km}{n^l}(r^l_a d^l_a + (m^l{}_{a+1} - m^l{}_a) d^l_{a+1}) = p.(r^l_a d^l_a - m^l{}_a d^l_{a+1}) + p.m^l{}_{a+1} d^l_{a+1} \leq \theta^l(i, a)$.
Si $q' = a$, $\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) \leq \theta^l(i, a)$.

L'égalité est atteinte si

$$\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{n^l.\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j,\tilde{p}j<i} c_j^l t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

où $\tilde{p} = [\frac{i}{m_a^l}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$.
Sous ces conditions on a $c_l = \frac{i}{n^l \tilde{p}} = c_j, j = 1, \ldots, s$ et $O_t(f_l(\phi)) = \theta^l(i,a)$. Mais d'après la prop.2.4.1. $\mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a)$, par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \theta^l(i,a).\sum_{j=1}^{s} \frac{n^j}{n^l}$$

2) Si $M > c$, avec les mêmes arguments que le cas 2, partie 1), et pour $M = c(f_l, g)$, avec $l \in E_u$, d'après la prop.2.4.2, on a

$$\begin{cases} \mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ \mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = [\frac{i}{m_a^l}]\dfrac{int(f_k, f_l)}{d_a^l} & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \sum_{f_j \in Q(\frac{m_a^l}{n^l})} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a) + \sum_{f_j \notin Q(\frac{m_a^l}{n^l})} [\frac{i}{m_a^l}]\frac{int(f_j, f_l)}{d_a^l}.$$

ii) S'il existe $v \notin E_u$ tel que $q_v \leq q$, alors $q_v = q_j, v, j, \notin E_u$, d'où la seconde assertion est vraie.

2.4.4 Calcul de $\beta(i)$ pour $i \geq N^r$

Théorème 2.4.14 *I) S'il existe $j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c < \frac{m_1^j}{n^j}$ alors*

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i; k_a^l(i).(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r_a^l + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d_a^l})|a \leq h_l, l = 1, \ldots, s;$$

$$\sum_{f_j \in Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a) + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m_a^l}{n^l}, l)} [\frac{i}{m_a^l}]\frac{int(f_j, f_l)}{d_a^l}|a \leq h_l, l = 1, ., s, (\frac{m_a^l}{n^l}, l) \in B\}$$

II) Sinon soit q le plus grand entier tel que $\frac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \frac{m_q^s}{n^s} < c$. On note pour $j \in 1, \ldots, s$, $q < h_j$:

$$L_j = \begin{cases} q & si\ c \neq \dfrac{m^j_{q+1}}{n^j} \\ q+1 & sinon. \end{cases}$$

Soit $A = \{j, L_j < h_j\}$:

$$\beta(i) = \max\{\sum_{j=1}^{s} n^j.i; k^1_a(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_a | a \leq q; \sum_{j=1}^{s} \theta^l(i,a).\frac{n^j}{n^l} | a \leq q, l = 1, \ldots, s;$$

$$k^l_a(i).(\sum_{f_j \in Q'(\frac{m^l_a}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_a + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m^l_a}{n^l}, l)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_a}) | L_l < a \leq h_l, l \in A;$$

$$\sum_{f_j \in Q'(\frac{m^l_a}{n^l}, l)} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i,a) + \sum_{f_j \notin Q'(\frac{m^l_a}{n^l}, l)} [\frac{i}{m^l_a}] \frac{int(f_j, f_l)}{d^l_a} | L_l < a \leq h_l, l \in A, (\frac{m^l_a}{n^l}, l) \in B\}$$

Démonstration On démontre II), la démonstration de I) étant similaire. Rappelons que pour $i \geq N^r$,

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) | \phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2, \phi \not\cong^i f_j, j = 1, \ldots, s\}.$$

Soit $\phi(t) \in \mathbf{K}[[t]]^2$ d'ordre $mk \leq i$. Soit $\bar{\phi}(t) = (t^m, y(t))$ une représentation de $\phi(t)$ d'ordre m, et soit g le polynôme unitaire irréductible tel que $g(\bar{\phi}) = 0$. On a

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k \sum_{j=1}^{s} int(f_j, g)$$

On pose $c_j = c(f_j, g)$.
Soit $M = \max\{c(f_j, g), j = 1, \ldots, s\}$ et $c = \min\{c(f_j, f_p), 1 \leq j \neq p \leq s\}$. On pose $s_j = \max\{0 \leq p \leq h_j | m \simeq 0(\dfrac{n^j}{d^j_{p+1}})\}$ pour $j = 1, \ldots, s$. D'après le corollaire 2.4.9., on a plusieurs cas. Soit $l \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c(f_l, g) = M$.

cas 1) $\mathrm{ord}_t(\phi) < \mathrm{O}_t(\phi_1)$, alors

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq \sum_{j=1}^{s} n^j.i$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^i, 0)$.

cas 2) $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1)$, n^j ne divise pas $\mathrm{ord}_t(\phi)$:
Si $j = l$ alors :

1) Si $M \leq c$, alors d'après la prop.2.4.1., $int(f_j, g) = \dfrac{n^j}{nl}.int(f_l, g)$ pour tout $j \in \{1, \ldots s\}$, et par le lemme 2.4.10. $k.int(f_l, g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}$.

$\diamond$ Si $s_l + 1 \leq q$, alors $int(f_j, g) \leq \dfrac{n^j}{n^l} k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}$. Mais dans ce cas $\dfrac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} = r^j_{s_l+1}$. Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^l_{s_l+1}(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

Si $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$. Dans ce cas,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi(t))) = k^l_{s_l+1}(i).\sum_{j=1}^{s} r^j_{s_l+1}.$$

$\diamond$ Si $s_l + 1 > q$ alors

$$\begin{cases} int(f_j, g) = \frac{n^j}{n^l} int(f_l, g) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ int(f_j, g) \leq \frac{m}{n^l}.int(f_j, f_l) & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

mais d'après le lemme 2.4.10., $k.int(f_l, g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1}(i)$. D'autre part, $\dfrac{km}{n^l} = \dfrac{kmd^l_{s_l+1}}{n^l}.\dfrac{1}{d^l_{s_l+1}} \leq k^l_{s_l+1}(i).\dfrac{1}{d^l_{s_l+1}}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_t(f(\phi)) &\leq k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l} int(f_l, f_j)) \\ &\leq \sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} k^l_{s_l+1}(i).\frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}} \\ &= k^l_{s_l+1}(i).(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}}) \end{aligned}$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$.

2) Si $M > c$ alors d'après la prop.2.4.2.,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = k.(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.int(f_l, g) + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{m}{n^l}.int(f_l, f_j))$$

Mais par le lemme 2.4.10., on a $k.int(f_l, g) \leq k^l_{s_l+1}(i).r^l_{s+1}$. D'autre part $\dfrac{km}{n^l} \leq \dfrac{1}{d^l_{s_l+1}}.k^l_{s_l+1}(i)$. Par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) \leq k^l_{s_l+1}(i)(\sum_{f_j \in Q(M)} \frac{n^j}{n^l}.r^l_{s_l+1} + \sum_{f_j \notin Q(M)} \frac{int(f_l, f_j)}{d^l_{s_l+1}})$$

et on a l'égalité pour $\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{k^l_{s_l+1}(i).\frac{n^l}{d^l_{s_l+1}}}, y^l_{s_l+1}(t^{k^l_{s_l+1}(i)}))$.

Si $j \neq l$, alors on a le cas suivant :

cas 3) Si $\mathrm{ord}_t(\phi) = \mathrm{O}_t(\phi_1), n^l$ divise $\mathrm{ord}_t(\phi)$ et $c_l \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$.

1) Si $M \leq c$, soit $\phi(t) = (t^{n^l p}, \phi_2(t)) = (t^{mk}, \theta(t^k))|(t^m, \theta(t))$ est irréductible.

Soit a l'unique entier tel que $m^l_a \leq \dfrac{i}{p} < m^l_{a+1}$, alors $[\dfrac{i}{m^l_{a+1}}] + 1 \leq p \leq [\dfrac{i}{m^l_a}]$. On a

$\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) = \dfrac{km}{n^l}(r^l_{q'}d^l_{q'} + (n^l c_l - m^l_{q'})d^1_{q'+1})$ où $\dfrac{m^l_{q'}}{n^1} \leq c_l < \dfrac{m^l_{q'+1}}{n^l}$. Mais $c_l \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_t(\phi)}$ alors $q' \leq a$.

Si $q' < a$, alors $\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) \leq \dfrac{km}{n^l}(r^l_a d^l_a + ({m^l}_{a+1} - {m^l}_a)d^l_{a+1}) = p.(r^l_a d^l_a - {m^l}_a d^l_{a+1}) + p.{m^l}_{a+1}d^l_{a+1} \leq \theta^l(i, a)$.

Si $q' = a$, alors $O_t(f_l(\phi)) \leq \theta^l(i, a)$.

L'égalité est atteinte si

$$\phi(t) = \tilde{\phi}(t) = (t^{n^l.\tilde{p}}, y'(t) = \sum_{j, \tilde{p}j < i} c^l_j t^{\tilde{p}j} + Zt^i).$$

où $\tilde{p} = [\dfrac{i}{m^l_a}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$.

Sous ces conditions on a $c_l = \dfrac{i}{n^l \tilde{p}} = c_j, j = 1, \ldots, s$.

$\mathrm{O}_t(f_l(\phi)) = \theta^l(i, a)$, et par la prop.2.4.1., $\mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = \dfrac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a)$, par conséquent

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \theta^l(i, a). \sum_{j=1}^{s} \frac{n^j}{n^l}$$

2) Si $M > c$, avec les mêmes arguments que le cas 3, partie 1), et pour $M = c(f_l, g)$, d'après la prop.2.4.2., on a

$$\begin{cases} \mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a) & \text{si } f_j \in Q(M) \\ \mathrm{O}_t(f_j(\phi)) = [\frac{i}{m^l_a}]\dfrac{int(f_k, f_l)}{d^l_a} & \text{si } f_j \notin Q(M) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{O}_t(f(\phi)) = \sum_{f_j \in Q(\frac{m^l_a}{n^l})} \frac{n^j}{n^l}.\theta^l(i, a) + \sum_{f_j \notin Q(\frac{m^l_a}{n^l})} [\frac{i}{m^l_a}]\frac{int(f_j, f_l)}{d^l_a}.$$

2.4.5 La fonction d'Artin-Greenberg et le semi-groupe de f

Dans cette partie on montre la relation entre la fonction d'Artin-Greenberg et le semi-groupe de f. Soit $f = f_1 ... f_s$ un polynôme réductible de $\mathbf{K}[[x]][y]$, où f_j est un polynôme irréductible de degré n^j en y. Soit $\beta(i)$ la fonction d'Artin-Greenberg de f. Soit $c = \min\{c(f_j, f_k), 1 \leq j \neq k \leq s\}$.
Remarquons que dans les théorèmes 2.4.11, 2.4.12 et 2.4.13 si on considère

$$(\mathrm{O}_t(f_1(\phi(t)), \ldots, \mathrm{O}_t(f_s(\phi(t)))$$

au lieu de faire la somme $\mathrm{O}_t(f_1(\phi)) + \ldots + \mathrm{O}_t(f_s(\phi))$ et en faisant varier i dans

$$\{\frac{n^j}{d_a^j}, j = 1, \ldots, s, a = 1, \ldots, h_l\}$$

on obtient

$$\bigcup_{j=1}^{s} \{\gamma^{1,j}, \ldots \gamma^{h_j,j}\}$$

s'il existe $j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $c < \dfrac{m_1^j}{n^j}$ où $\alpha^a = (r_a^1, \ldots, r_a^s), a = 1, \ldots, q$, et pour $a > L_j$, $\gamma^{a,j} = (\gamma_1^{a,j}, \ldots, \gamma_s^{a,j})$ est donné par

$$\gamma_k^{a,j} = \begin{cases} \dfrac{n^k}{n^j} r_a^j & \text{si } f_k \in Q'(\dfrac{m_a^j}{n^j}, j) \\ \dfrac{int(f_k, f_j)}{d_a^j} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $(\dfrac{m_a^j}{n^j}, j) \in B$.

Sinon soit q le plus grand entier tel que $\dfrac{m_q^1}{n^1} = \ldots = \dfrac{m_q^s}{n^s} < c$, et on note pour $j \in 1, \ldots, s$, $q < h_j$:

$$L_j = \begin{cases} q & \text{si } c \neq \dfrac{m_{q+1}^j}{n^j} \\ q+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $A = \{j, L_j < h_j\}$. Dans ce cas le résultat est :

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\} \bigcup \bigcup_{j \in A} \{\gamma^{L_j+1,j}, \ldots \gamma^{h_j,j}\}$$

où $\alpha^a = (r_a^1, \ldots, r_a^s), a = 1, \ldots, q$, et pour $a > L_j$, $\gamma^{a,j} = (\gamma_1^{a,j}, \ldots, \gamma_s^{a,j})$ est donné par

$$\gamma_k^{a,j} = \begin{cases} \dfrac{n^k}{n^j} r_a^j & \text{si } f_k \in Q'(\dfrac{m_a^j}{n^j}, j) \\ \dfrac{int(f_k, f_j)}{d_a^j} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $(\frac{m_a^j}{n^j}, j) \in B$.

Mais cet ensemble avec les multiplicités à l'origine n'est rien d'autre que l'ensemble des maximaux absolus irréductibles de $\Gamma(f)$ [8].

2.5 Calcul de $\beta(i)$ pour un polynôme à deux branches avec MAPLE

$>$ *diviseur* := *proc*(r :: *list*) ♯♯ Calcule la suite des pgcd d'une suite $(r_i)_{0\leq i\leq h}$
local a, d ;
$d[1] := r[1]$;
for a from 2 to $nops(r)$ do $d[a] := igcd(r[a], d[a-1])$ end do ;
$[seq(d[a], a = 1..nops(r))]$;
end proc :

$>$ m := *proc*(r :: *list*) ♯♯ Calcule la suite des $(m_i)_{0\leq i\leq h}$ à partir de la suite $(r_i)_{0\leq i\leq h}$
local a, m, d;
$d := diviseur(r)$;
$m[1] := r[1]$;
$m[2] := r[2]$;
for a from 3 to $nops(r)$ do $m[a] := r[a] + m[a-1] - r[a-1].\frac{d[a-2]}{d[a-1]}$ end do ;
$[seq(m[a], a = 1..nops(r))]$;
end proc :

$>$ L := *proc*(r :: *list*, n, M, q) ♯♯ Calcule L_1 et L_2
local l ;
if $q < nops(r)$ then
if $M = r[q+1].d[q].\frac{n}{d[1]}$ then $l := q+1$
else $l := q$ end if ;
else $l := q$ end if ;
l ;
end proc :

$>$ $s1$:= *proc*($r1$ :: *list*, $r2$ :: *list*, M, q)
local a, l ;
for a from 1 to q do $l[a] := r1[a] + r2[a]$ end do ;
$[seq(l[a], a = 1..q)]$;
end proc :

$>$ $s2$:= *proc*($r1$ :: *list*, n, M, q)
local $a, l, d1, l1$;
$d1 := diviseur(r1)$;
$l1 := L(r1, n, M, q)$;

if $l1 < nops(r1)$ then
for a from $l1+1$ to $nops(r1)$ do $l[a] := r1[a] + \dfrac{M}{d1[a-1]}$ end do ;
else $l[a] := 0$ end if ;
$[seq(0, a = 1..l1), seq(l[a], a = l1+1..nops(r1))]$;
end proc :

$> s3 := proc(r2 :: list, n, M, q)$
local $a, l, d2, l2$;
$d2 := diviseur(r2)$;
$l2 := L(r2, n, M, q)$;
if $l2 < nops(r2)$ then
for a from $l2+1$ to $nops(r2)$ do $l[a] := r2[a] + \dfrac{M}{d2[a-1]}$ end do ;
else $l[a] := 0$ end if ;
$[seq(0, a = 1..l2), seq(l[a], a = l2+1..nops(r2))]$;
end proc :

$> k := proc(r :: list, i)$ ♯♯ Calcule la suite des $k_j^a(i)$
local a, k, d ;
$d := diviseur(r)$;
for a from 1 to $nops(r)$ do
if ‘mod‘(floor(i*$\dfrac{d[a]}{d[1]}$), d[a]) $= 0$ then $k[a] := floor(i.\dfrac{d[a]}{d[1]}) - 1$
else $k[a] := floor(i.\dfrac{d[a]}{d[1]})$ end if ; end do ;
$[seq(k[a], a = 1..nops(d))]$;
end proc :

$> \theta := proc(r :: list, i)$ ♯♯ Calcule $\theta(i, a), a = 0, \ldots, h$ à partir de la suite $(r_j), i$
local $a, y, \theta, m1, d$;
$m1 := m(r)$;
$d := diviseur(r)$;
for a from 2 to $nops(d) - 1$ do
if $0 < iquo(i, m1[a]) - iquo(i, m1[a+1])$ then
$\theta[a] := iquo(i, m1[a]).(r[a].d[a-1] - m1[a].d[a]) + i.d[a]$
else $\theta[a] := 0$ end if ; end do ;
if $0 < iquo(i, m1[nops(d)])$ then
$y := iquo(i, m1[nops(d)]).(r[nops(d)].d[nops(d)-1] - m1[nops(d)].d[nops(d)]) + i.d[nops(d)]$
else $y := 0$ end if ;
$[0, seq(\theta[a], a = 2..nops(d)-1), y]$; end proc :

$> \beta := proc(i, r1 :: list, r2 :: list, M, q)$ ♯♯
Calcule $\beta(i)$ à partir de $(r_i^1)_{0 \le i \le h_1}, (r_i^2)_{0 \le i \le h_2}, int(f_1, f_2) = M$ et q où q est le plus grand entier tel que $\dfrac{r1[q]}{r1[1]} = \dfrac{r2[q]}{r2[1]} < c(f_1, f_2)$

local $A, d1, d2, m1, m2, \theta 1, \theta 2, k1, k2, x, y, z, l1, l2$;
$d1 := diviseur(r1)$;
$d2 := diviseur(r2)$;
$m1 := m(r1)$;
$m2 := m(r2)$;
$\theta 1 := \theta(r1, i)$;
$\theta 2 := theta(r2, i)$;
$k1 := k(r1, i)$;
$k2 := k(r2, i)$;
$x := s1(r1, r2, M, q)$;
$y := s2(r1, r2[1], M, q)$;
$z := s3(r2, r1[1], M, q)$;
$l1 := L(r1, r2[1], M, q)$;
$l2 := L(r2, r1[1]M, q)$;
if $r1[1] < r2[1]$ then
if $i < r1[1]$ then
$A := max(seq(floor(i.\frac{d1[a-1]}{d1[1]}).x[a], a = 2..q), seq(floor(i.\frac{d1[a-1]}{d1[1]}).y[a], a = l1{+}1..nops(d1)),$
$seq(floor(i.\frac{d2[a-1]}{d2[1]}).z[a], a = l2 + 1..nops(d2)))$
elif $r1[1] - 1 < i < r2[1]$ then
$A := max((d1[1] + d2[1]).i, seq(floor(i.\frac{d1[a-1]}{d1[1]}).x[a], a = 2..q),$
$seq(k1[a-1].y[a], a = l1 + 1..nops(d1)), seq(floor(i.\frac{d2[a-1]}{d2[1]}).z[a], a = l2 + 1..nops(d2)),$
$seq(\theta 1[a].(1 + \frac{d2[1]}{d1[1]}), a = 2..q), seq(\theta 1[a] + \frac{M}{d1[a-1]}.floor(\frac{i}{m1[a]}), a = l1 + 1..nops(d1)))$
else $A := max((d1[1] + d2[1]).i, seq(k1[a-1].x[a], a = 2..q), seq(k1[a-1].y[a],$
$a = l1 + 1..nops(d1)), seq(k2[a-1].z[a], a = l2 + 1..nops(d2)), seq(\theta 1[a].(1 + \frac{d2[1]}{d1[1]}), a = 2..q),$
$seq(\theta 1[a] + \frac{M}{d1[a-1]}.floor(\frac{i}{m1[a]}), a = l1 + 1..nops(d1)), seq(\theta 2[a].(1 + \frac{d1[1]}{d2[1]}), a = 2..q),$
$seq(\theta 2[a] + \frac{M}{d2[a-1]}.floor(\frac{i}{m2[a]}), a = l2 + 1..nops(d2)))$ end if ;
elif $r2[1] < r1[1]$ then
if $i < r2[1]$ then
$A := max(seq(floor(i.\frac{d1[a-1]}{d1[1]}).x[a], a = 2..q), seq(floor()i.\frac{d1[a-1]}{d1[1]}).y[a], a = l1{+}1..nops(d1)),$
$seq(floor(i.\frac{d2[a-1]}{d2[1]}).z[a], a = l2 + 1..nops(d2)))$
elif $r2[1] - 1 < i < r1[1]$ then

$A := max((d1[1] + d2[1]).i, seq(floor(i.\dfrac{d1[a-1]}{d1[1]}).x[a], a = 2..q),$
$seq(k2[a-1].z[a], a = l2 + 1..nops(d2)), seq(floor(i.\dfrac{d1[a-1]}{d1[1]}).y[a], a = l1 + 1..nops(d1)),$
$seq(\theta2[a].(1 + \dfrac{d2[1]}{d1[1]}), a = 2..q), seq(\theta2[a] + \dfrac{M}{d2[a-1]}.floor(\dfrac{i}{m2[a]}, a = l2 + 1..nops(d2)))$
else $A := max((d1[1] + d2[1]).i, seq(k1[a-1].x[a], a = 2..q),$
$seq(k1[a-1].y[a], a = l1 + 1..nops(d1)), seq(k2[a-1].z[a], a = l2 + 1..nops(d2)),$
$seq(\theta1[a].(1 + d\dfrac{d2[1]}{d1[1]}), a = 2..q), seq(\theta1[a] + \dfrac{M}{d1[a-1]}.floor(\dfrac{i}{m1[a]}, a = l1 + 1..nops(d1)),$
$seq(\theta2[a].(1+\dfrac{d1[1]}{d2[1]}), a = 2..q), seq(\theta2[a]+\dfrac{M}{d2[a-1]}.floor(\dfrac{i}{m2[a]}, a = l2+1..nops(d2)))$ end if ;

else
if $i < r1[1]$ then
$A := max(seq(floor(i.\dfrac{d1[a-1]}{d1[1]}).x[a], a = 2..q), seq(floor(i.\dfrac{d1[a-1]}{d1[1]}).y[a], a = l1+1..nops(d1)),$
$seq(floor(i.\dfrac{d2[a-1]}{d2[1]}).z[a], a = l2 + 1..nops(d2)))$
else $A := max((d1[1] + d2[1]).i, seq(k1[a-1].x[a], a = 2..q),$
$seq(k1[a-1].y[a], a = l1 + 1..nops(d1)), seq(k2[a-1].z[a], a = l2 + 1..nops(d2)),$
$seq(\theta1[a].(1 + \dfrac{d2[1]}{d1[1]}), a = 2..q), seq(\theta1[a] + \dfrac{M}{d1[a-1]}.floor(\dfrac{i}{m1[a]}, a = l1 + 1..nops(d1)),$
$seq(\theta2[a].(1 + \dfrac{d1[1]}{d2[1]}), a = 2..q), seq(\theta2[a] + \dfrac{M}{d2[a-1]}.floor(\dfrac{i}{m2[a]}, a = l2 + 1..nops(d2)))$
end if ;end if ;
end proc :

Chapitre 3

Approximations des solutions d'une singularité quasi-ordinaire

3.1 Les combinaisons linéaires strictes

Soit $n, e \in \mathbb{N}$ et notons $r_0^1 = (n, \ldots, 0), r_0^i = (0, \ldots, n, \ldots, 0), r_0^e = (0, \ldots, n)$ la base canonique de $(n\mathbb{Z})^e$. Soit $(r_1, \ldots, r_h)$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}^e$. Soit D_1^e et pour tout $1 \leq i \leq h$, soit D_{i+1} le pgcd des mineurs d'ordre e de la matrice $((r_0^1)^T, \ldots, (r_0^e)^T, (r_1)^T, \ldots, (r_i)^T)$, où si $r \in \mathbb{Z}^e$, alors $(r)^T$ désigne la transposée de la matrice ligne (r). Supposons que $r_i \notin (n\mathbb{Z})^e + \sum_{j=1}^{i-1} r_j\mathbb{Z}$, en particulier $D_{i+1} < D_i$. On définit les éléments de la suite $(e_i)_{1 \leq i \leq h}$ par $e_i = \dfrac{D_i}{D_{i+1}}$ pour tout $1 \leq i \leq h$.

Soient $M_0 = (n\mathbb{Z})^e$ et $M_j = (n\mathbb{Z})^e + \sum_{i=1}^{j} r_i\mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq h$. Les groupes $\mathbb{Z}^e$ et $(n\mathbb{Z})^e$ étant libres de rang e, on en déduit que c'est le cas pour tous les $M_j, j = 0, \ldots, h$. En particulier M_j possède une base de e éléments pour tout $j = 0, \ldots, h$.

Proposition 3.1.1 *Soit r un élément non nul de $\mathbb{Z}^e$ et soit D le pgcd des mineurs d'ordre e de la matrice $[r_0^1, \ldots, r_0^e, r_1, \ldots, r_i, r]$. Alors $r \in M_i$ si et seulement si $D = D_{i+1}$.*

Démonstration Soit $L_1, \ldots, L_e$ une base de M_i, en particulier D_{i+1} est le déterminant de la matrice $C = [(L_1)^T, \ldots, (L_e)^T]$. La condition $r \in M_j$ équivaut alors à un système de Cramer $C.a^T = r^T$ où $a \in \mathbb{Z}^e$. Ce système possède une solution si et seulement D, le pgcd des mineurs d'ordre e de la matrice $[(L_1)^T, \ldots, (L_e)^T, (r)^T]$ est égal à D_{i+1}.

Lemme 3.1.2 *Soit $\gamma \in \mathbb{Z}$ et soit $i \in \{1, \ldots, h\}$. On a :*

$$\gamma.r_{i+1} \in M_i \textit{ si et seulement si } e_{i+1} \textit{ divise } \gamma.$$

Démonstration En effet, si $r = \gamma.r_{i+1}$, alors le déterminant D de la proposition 3.1.1. divise $\gamma.D_{i+2}$ mais par cette même proposition, $\gamma.r_{i+1} \in M_i$ si et seulement si $D = D_{i+1}$, d'où le résultat.

Lemme 3.1.3 *Soit* $a = \sum_{i=1}^{e} a_0^i r_0^i + \sum_{i=1}^{h} a_i.r_i$ *et* $b = \sum_{i=1}^{e} b_0^i r_0^i + \sum_{i=1}^{h} b_i.r_i$ *avec* $a_0^i, b_0^i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, e$ *et* $0 \leq a_i, b_i < e_i, i = 1, \ldots, h$. *On a* $a = b$ *si et seulement si* $a_0^i = b_0^i, i = 1, \ldots, e$ *et* $a_i = b_i, i = 1, \ldots, h$.

Démonstration Supposons $a = b$ et soit $j \in \{1, \ldots, h\}$ le plus grand entier tel que $a_j \neq b_j$. Supposons sans perte de généralité que $a_j > b_j$, en particulier

$$0 = a - b = \sum_{i=1}^{e} (a_0^i - b_0^i) r_0^i + \sum_{i=1}^{j} (a_i - b_i).r_i$$

où $0 \leq a_j - b_j < e_j$. Mais alors $(a_j - b_j) r_j \in M_{j-1}$, et d'après le lemme précédent e_j divise $a_j - b_j$, ce qui est une contradiction.

Proposition 3.1.4 *Soit* $a \in M_h$, *a posséde une représentation unique de la forme*

$$a = \sum_{i=1}^{e} a_0^i r_0^i + \sum_{i=1}^{h} a_i.r_i$$

où $a_0^i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, e$ *et* $0 \leq a_i < e_i, i = 1, \ldots, h$.

Démonstration L'unicité est une conséquence du lemme précédent. Montrons l'existence de cette écriture : Soit $a \in M_h$ et écrivons $a = \sum_{i=1}^{e} a_0^i r_0^i + \sum_{i=1}^{h} a_i.r_i$, $a_0^i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, e$ et $a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, h$. Soit $j = h$ et écrivons $a_j = b_j.e_j + R_j$ avec $b_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq R_j < e_j$, mais $e_j.r_j \in M_{j-1}$, ainsi en répétant cette procédure on obtient l'écriture demandée par récurrence.

3.2 Les racines approchées

Soit S un anneau commutatif unitaire, et soit $S[y]$ l'anneau des polynômes en y à coefficients dans S. Soit $f = y^n + a_1.y^{n-1} + \ldots + a_n$ un polynôme unitaire de $S[y]$ de degré $n > 0$ en y. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que d divise n. Soit g un polynôme unitaire de $S[y]$ de degré $\frac{n}{d}$ en y. Il existe des polynômes uniques $a_1(y), \ldots, a_d(y)$ tel que

$$f = g^d + \sum_{i=1}^{d} a_i(y).g^{d-i}$$

et que pour tout $1 \leq i \leq d$, $deg_y(a_i) < \frac{n}{d}$ où deg_y désigne le degré en y. Cette écriture est appelée l'expansion g-adique de f.
Cette construction peut être généralisée à une suite de polynômes. Soit $n = d_1 > d_2 > \ldots > d_{h+1}$ une suite d'entiers tel que pour tout $1 \leq i \leq h$, d_{i+1} divise d_i. Soit $e_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}, i = 1, \ldots, h$ et pour tout $1 \leq i \leq h + 1$, soit g_i un polynôme unitaire de $S[y]$ de degré $\frac{n}{d_i}$ en y. Soit

$\underline{g} = (g_1, \ldots, g_{h+1})$ et soit $B(\underline{g}) = \{\underline{\theta} \in \mathbb{N}^{h+1}; 0 \leq \theta_k < e_k$ pour tout $1 \leq k \leq h$ et $\theta_{h+1} < +\infty\}$. Alors f s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$f = \sum_{\underline{\theta} \in B(\underline{g})} a_\theta g_1^{\theta_1}. \ldots .g_h^{\theta_h}.g_{h+1}^{\theta_{h+1}}$$

où $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{h+1})$. On appelle cette écriture l'expansion $\underline{g}$-adique de f. On appelle le $\underline{g}$-support de f l'ensemble $\mathrm{Supp}_{\underline{g}}(f) = \{\underline{\theta} \in B(\underline{g}), c_\theta \neq 0\}$.

Etant donnés f et g comme ci-dessus, soit $f = g^d + \sum_{i=1}^{d} a_i(y).g^{d-i}$ l'expansion g-adique de f. Supposons que d est une unité dans S. Le transformé de Tschirnhausen de f par rapport à g est donné par $\tau_f(g) = g + d^{-1}a_1$. Notons que $\tau_f(g) = g$ si et seulement si $a_1 = 0$. D'après [1], $\tau_f(g) = g$ si et seulement si $deg_y(f - g^d) < n - \dfrac{n}{d}$. Si l'une de ces conditions est satisfaite alors g est appelé la d-ième racine approchée de f. D'après [1], il existe une unique d-ième racine approchée de f. On le note $\mathrm{App}_d(f)$.

3.3 Le semi-groupe d'une singularité quasi-ordinaire

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit

$$f(\underline{x}, y) = y^n + a_1(\underline{x})y^{n-1} + \ldots + a_n(\underline{x})$$

un polynôme non nul distingué de $\mathbf{R} = \mathbf{K}[[\underline{x}]][y]$ où $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_e)$. Supposons que le discriminant de f est de la forme $x_1^{N_1}. \ldots .x_e^{N_e}.u(x_1, \ldots, x_e)$, où $N_1, \ldots, N_e \in \mathbb{N}$ et $u(0) \in \mathbf{K}^*$. Un tel polynôme est dit quasi-ordinaire. Supposons que f est irréductible, d'après le théorème d'Abhyankar-Jung toutes les racines de $f(\underline{x}, y) = 0$ sont dans $\mathbf{K}[[x_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{n}}]]$. Posons $x_i = t_i^n, i = 1, \ldots, e$ et soit $y(\underline{t}) = y(t_1, \ldots, t_e) \in \mathbf{K}[[t_1, \ldots, t_e]]$ (qu'on note $\mathbf{K}[[\underline{t}]]$) tel que $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y(\underline{t})) = 0$. On a :

$$f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = \prod_{i=1}^{n}(y - y(w_1^i t_1, \ldots, w_e^i t_e))$$

où $(w_1^i, \ldots, w_e^i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des éléments de $(U_n)^e$, U_n étant l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{K}$.

On pose $y(\underline{t}) = \sum_p c_p \underline{t}^p$ et on définit le support de y comme étant l'ensemble $\{p | c_p \neq 0\}$. Clairement le support de $y(w_1 t_1, \ldots, w_e t_e)$ ne dépend pas de $w_1, \ldots, w_e \in U_n$. On l'appelle le support de f et on le note $\mathrm{Supp}(f)$. D'après Lipman[20], Il existe une suite finie d'éléments dans $\mathrm{Supp}(f)$, notée $m_1, \ldots, m_h$, tels que

i) $m_1 < m_2 < \ldots < m_h$, où $<$ est défini par $\alpha < \beta$ si et seulement si $\alpha_i < \beta_i, i = 1, \ldots, e$.

ii) Si $c_p \neq 0$, alors $p \in (n.\mathbb{Z})^e + \sum_{|m_i| \leq |p|} m_i\mathbb{Z}$ (où pour tout $p \in \mathbb{N}^e$,$|p|$ est défini comme étant la somme des composantes de p).

iii) $m_j \notin (n\mathbb{Z})^e + \sum_{i<j} m_i\mathbb{Z}$.

On appelle $m_1, \ldots, m_h$ les exposants caractéristiques de f. Par convention on note $m_{h+1} = (+\infty, \ldots, +\infty)$. Si $e = 1$, cet ensemble n'est rien d'autre que les exposants de Newton-Puiseux de f.

Définition 3.3.1 *Notons $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_e)$, soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $\phi(\underline{t}) = (t_1^N, \ldots, t_e^N, z(\underline{t})) \in \mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}$. On dit que $z(\underline{t})$ est une série quasi-ordinaire s'il existe un nombre fini d'éléments $m_1, \ldots, m_h$ dans $\mathrm{Supp}(z(\underline{t}))$ tel que les conditions i), ii), et iii) sont vérifiées. On dit que $\phi(\underline{t})$ est une branche quasi-ordinaire si ϕ est une racine d'un polynôme quasi ordinaire. Soit q le degré du polynôme minimal g de $z(x_1^{\frac{1}{N}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{N}})$ sur $\mathbf{K}((x_1, \ldots, x_e))$ et remarquons que $g(t_1^N, \ldots, t_e^N, z(\underline{t})) = 0$. Si $q = N$ alors ϕ est dite primitive. Si q divise N et $q < N$, alors ϕ n'est pas primitive. Enfin, si $f.g$ est un polynôme quasi-ordinaire, on dit alors que $\phi(\underline{t})$ est cohérent avec f. L'ensemble des branches quasi-ordinaires (resp. quasi ordinaires primitifs, resp.quasi-ordinaires cohérents avec f) est noté $QO(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$ (resp. $PQO(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$, resp. $(QO(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$). Le polynôme minimal d'un élément quasi-ordinaire cohérent avec f est dit un polynôme quasi-ordinaire cohérent avec f.*

Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $\gamma(\underline{x}) = \sum_{p \in \mathbb{N}^e} c_p . \underline{x}^{\frac{p}{N}} \in \mathbf{K}[[x_1^{\frac{1}{N}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{N}}]]$ avec $\dfrac{p}{N} = (\dfrac{p_1}{N}, \ldots, \dfrac{p_e}{N})$ pour tout $p \in \mathbb{N}^e$. Supposons que $\gamma(\underline{x})$ est quasi-ordinaire et notons $\{L_1, \ldots, L_h\}$ l'ensemble des exposants caractéristiques de γ. On pose $F_0 = \mathbf{K}((\underline{x}))$, et $F_k = F_{k-1}((x_1^{\frac{L_k^1}{N}} ... x_e^{\frac{L_k^e}{N}}), k = 1, \ldots, h$. En particulier on a

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_h = \mathbf{K}((\underline{x}^{\frac{L_1}{N}}, \ldots, \underline{x}^{\frac{L_h}{N}})).$$

Soit $a_0^1 = (N, 0, \ldots, 0), \ldots, a_0^e = (0, \ldots, N)$ la base canonique de $(N\mathbb{Z})^e$, et soit $\tilde{D}_1 = N^e$. Soit $\tilde{D}_{k+1}$ le pgcd des mineurs d'ordre e de la matrice $(a_0^1, \ldots, a_0^e, (L_1)^T, \ldots, (L_k)^T), k = 1, \ldots, h$. On pose $e_k = \dfrac{\tilde{D}_k}{\tilde{D}_{k+1}}$. Avec ces notations on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 *i) Pour $k \in \{1, \ldots, h\}$, F_k est une extension algébrique de degré e_k de F_{k-1}.*

ii) Pour $k \in \{1, \ldots, h\}$, F_k est une extension algébrique de degré $e_k.e_{k-1}.\ldots.e_1$ de F_0.

iii) $F_h = F_0(\gamma(\underline{x}))$.

Notons $g(\underline{x}, y)$ le polynôme minimal de $\gamma(\underline{x})$ sur F_0,on a :

iv) $deg_y(g) = e_1.\ldots.e_h = \dfrac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_{h+1}} = \dfrac{N^e}{\tilde{D}_{h+1}}$.

v) g est un polynôme quasi-ordinaire dans $\mathbf{K}[[\underline{x}]][y]$.

Démonstration iii) résulte de [20], parag.5, et les autres assertions sont évidentes.

Soit n le degré en y de g, en particulier $\gamma(\underline{x}) \in \mathbf{K}[[x_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{n}}]]$. Soit $m_k = \dfrac{n}{N}.L_k, k = 1, \ldots, h$, en particulier $m_1, \ldots, m_h$ vérifient les conditions i), ii) et iii).

Soit $M(e,e)$ la matrice unité d'ordre e. Soit $D_1 = n^e$ et pour tout $1 \leq k \leq h$, soit D_{k+1} le pgcd des mineurs d'ordre e de la matrice $(nM(e,e), (m_1)^T, \ldots, (m_k)^T)$. Clairement $e_k = \dfrac{D_k}{D_{k+1}}$ pour tout $1 \leq k \leq h$. En particulier, comme $deg_y g = n$ alors $D_{h+1} = n^{e-1}$.
On pose $d_i = \dfrac{D_i}{D_{h+1}}$ pour tout $1 \leq i \leq h+1$. En particulier $d_1 = n$ et $d_{h+1} = 1$. La suite $(d_1, d_2, \ldots, d_{h+1})$ est appelée la suite des pgcd associés à f.
Étant donnée une série $u = \sum_p c_p \underline{t}^p$ dans $\mathbf{K}[[\underline{t}]]$, on note $\mathrm{In}(u)$ la forme initiale de u : si $u = u_d + u_{d+1} + \ldots$ est la décompostion de u comme somme de composantes homogènes, alors $\mathrm{In}(u) = u_d$. On pose $d = \mathrm{O}_{\underline{t}}(u)$ et on l'appelle le $\underline{t}$-ordre de u. On note $\exp(u)$ l'exposant dominant de u : c'est le plus grand exposant dans $\mathrm{In}(u)$ par rapport à l'ordre lexicographique. Le monôme $c_{\exp(u)}\underline{t}^{\exp(u)}$ est noté $\mathrm{M}(u)$, et appelé le monôme initial de u.
Soit $\phi(\underline{t}) = (\phi_1(\underline{t}), \ldots, \phi_{e+1}(\underline{t})) \in \mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}$, le $\underline{t}$-ordre de ϕ est défini par

$$\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})) = \min_{1 \leq i \leq e+1} \mathrm{O}_{\underline{t}}(\phi_i(\underline{t})).$$

Soit g un polynôme non-nul quasi-ordinaire de $\mathbf{R}$. L'ordre de g par rapport à f, noté $\mathrm{O}(g,f)$, est défini par $\exp(g(t_1^n, \ldots, t_e^n, y(\underline{t}))$. Notons que cet ordre ne dépend pas du choix de la racine $y(\underline{t})$ de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$. L'ensemble $\{\mathrm{O}(f,g) | g \in \mathbf{R}\}$ est un semi-groupe de $\mathbb{N}^e$. On l'appelle le semi-groupe associé avec f et on le note $\Gamma(f)$.

Soit $r_1 = m_1$ et pour $j = 1, \ldots, h-1$, $r_{j+1} = e_j r_j + m_{j+1} - m_j$. Si $\{a_1, \ldots, a_e\}$ est la base canonique de $\mathbf{Z}^e$, alors l'ensemble $\{na_1, \ldots, na_e, r_1, \ldots, r_h\}$ engendre le semi-groupe de f, $\Gamma(f)$.
Soit $y_1(\underline{t}), \ldots, y_n(\underline{t})$ l'ensemble des racines de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$ déjà introduites. Soit $1 \leq j \leq n$, on a :

Lemme 3.3.3 *i)* $\mathrm{In}(y_j - y_i)$ *est un monôme pour tout* $i \neq j$. *De plus,*

$$\{\exp(y_i - y_j) | 1 \leq i \neq j \leq n\} = \{m_1, \ldots, m_h\}.$$

ii) Pour tout $1 \leq k \leq h$, *le cardinal de* $\{y_i | \exp(y_i - y_j) = m_k\}$ *est* $d_k - d_{k+1}$.

Démonstration La preuve est similaire à celle des courbes planes. Notons que pour $1 \leq i \neq j \leq n$, comme $y_i - y_j$ divise le discriminant, alors $y_i - y_j = a.\underline{t}^{m_{ij}}.u_{ij}$, où $a \in \mathbf{K}^*, m_{ij}$ est un exposant caractéristique et u_{ij} est une unité dans $\mathbf{K}[[\underline{t}]]$. En particulier, $\mathrm{In}(y_i - y_j) = a.\underline{t}^{m_{ij}}$.
Soit $\phi(\underline{t}) = (t_1^p, \ldots, t_e^p, Y(\underline{t})), \psi(\underline{t}) = (t_1^q, \ldots, t_e^q, Z(\underline{t}))$ deux éléments non nuls de $\mathrm{PQO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$. On définit le contact entre ϕ et ψ par $c(\phi, \psi) = \dfrac{1}{pq}\exp(Y(t_1^q, \ldots, t_e^q) - Z(t_1^p, \ldots, t_e^p))$.
Le contact entre f et ϕ, noté $c(f, \phi)$, est défini comme étant l'élément maximal parmi l'ensemble de contacts entre ϕ et les racines de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$.
Soit $g = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \ldots + b_m(x)$ un polynôme distingué de $\mathbf{R}$. Supposons que g est un polynôme quasi-ordinaire irréductible et soit $\psi(\underline{t}) = (t_1^m, \ldots, t_e^m, z(\underline{t}))$ une racine de $g(\underline{x}, y) = 0$. On définit le contact entre f et g par $\mathrm{c}(f,g) = c(f, \psi)$, et on note que cette définition ne dépend pas du choix de la racine ψ de g. Si g est cohérent avec f, alors $\mathrm{In}(f(\psi(\underline{t})) = \mathrm{M}(f(\psi(\underline{t}))$.

Supposons que g est un polynôme quasi-ordinaire irréductible cohérent avec f et soient $(D'_j)_{1\leq j\leq h'+1}$ (resp. $(d'_j)_{1\leq j\leq h'+1}$, $(m'_j)_{1\leq j\leq h'}$) l'ensemble des suites caractéristiques associées avec g. Soit c le contact entre f et g. Avec ces notations on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.4 *i) Si* $|n.c| < |m_1|$ *alors* $\mathrm{O}(f,g) = n.m.c.$

ii) Si $|m_q| \leq |n.c| < |m_{q+1}|$, $1 \leq q \leq h$ *alors* $\mathrm{O}(f,g) = (r_q d_q + (nc - m_q)d_{q+1}).\dfrac{m}{n}$.

iii) Si $|c| > |\dfrac{m_q}{n}|$, *alors* $\dfrac{n}{d_{q+1}}$ *divise* m.

Démonstration Soit $(t_1^m, \ldots, t_e^m, z(\underline{t}))$ une racine de $g(x,y) = 0$, on a $\mathrm{O}(f,g) = \exp(f(t_1^m, \ldots, t_e^m, z(\underline{t})))$. Comme

$$f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = \prod_{w_1,\ldots,w_e \in U_n} (y - y(w_1 t_1, \ldots, w_e t_e))$$

alors

$$f(t_1^m, \ldots, t_e^m, z(t)) = \prod_{w_1,\ldots,w_e \in U_n} (z(\underline{t}) - y(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})))$$

par conséquent

$$\mathrm{O}(f,g) = \sum_{w_1,\ldots,w_e \in U_n} \exp(z(\underline{t}) - y(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})).$$

Supposons que $c(f,g) = \dfrac{1}{nm}\exp(y_1(t_1^m, \ldots, t_e^m) - z(t_1^n, \ldots, t_e^n))$.

i) Si $|c| < |\dfrac{m_1}{n}|$ alors $\exp(z(\underline{t}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = mc$. Par conséquent $\mathrm{O}(f,g) = n.m.c.$

ii) Sinon, soit q l'unique entier tel que $|m_q| \leq |n.c| < |m_{q+1}|$. On a :

ii.1) Si $\exp(y_1(t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, t_e^{\frac{m}{n}}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = \dfrac{m}{n}.m_l$ avec $l \leq q$ alors

$$\exp(z(\underline{t}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = \frac{m}{n}.m_l.$$

Par conséquent

$$card\{y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}}), \exp(z(\underline{t}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = \frac{m.m_l}{n}\} = d_l - d_{l+1}, l = 1, \ldots, q.$$

ii.2) Si $\exp(y_1(t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, t_e^{\frac{m}{n}}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = \dfrac{m}{n}.m_l$ avec $l > q$ alors

$$\exp(z(\underline{t}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = m.c.$$

Par conséquent

$$card\{y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}}), \exp(z(\underline{t}) - y_1(w_1^{\frac{m}{n}} t_1^{\frac{m}{n}}, \ldots, w_e^{\frac{m}{n}} t_e^{\frac{m}{n}})) = c.m\} = d_{q+1}.$$

D'où

$$\mathrm{O}(f,g) = d_{q+1}.c.m + \sum_{l=1}^{q} (d_l - d_{l+1}).\frac{m.m_l}{n}$$

$$= \frac{m}{n}(r_q d_q + (nc - m_q)d_{q+1}).$$

iii) Soit $\phi = (t_1^n, \ldots, t_e^n, y(\underline{t}))$ (resp. $\psi = (t_1^m, \ldots, t_e^m, z(t))$) une racine de $f(x_1, \ldots, x_e, y) = 0$ (resp. $g(x_1, \ldots, x_e, y) = 0$) et supposons que $c = c(\phi, \psi)$. Si $|nc| > |m_q|$ alors les exposants de $z(t_1^n, ..., t_e^n)$ coincident avec ceux de $y({t_1}^m, ..., {t_e}^m)$ jusqu'au moins $m_q.m$. Ecrivons $y(\underline{t}) = \sum_i c_i \underline{t}^i$ et $z(\underline{t}) = \sum_j c'_j \underline{t}^j$, alors pour tout $i \in \mathrm{Supp}(y)$, il existe $j \in \mathrm{Supp}(z)$ tel que $i.m = j.n$.
D'autre part, le pgcd des mineurs de la matrice $(m.nM(e,e), (m.m_1)^T, \ldots, (m.m_q)^T)$ est $m^e.D_{q+1}$, et celui de la matrice $(m.nM(e,e), (n.m'_1)^T, \ldots, (n.m'_q)^T)$ est $n^e.D'_{q+1}$. D'où $m^e.D_{q+1} = n^e.D'_{q+1}$, en particulier $m^e.n^{e-1}d_{q+1} = n^e.m^{e-1}.d'_{q+1}$. Ceci implique $m = \dfrac{n}{d_{q+1}}.d'_{q+1}$, ce qui montre le résultat.

Avec les notations ci-dessus, soit $q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq h+1$. Soit g_q la d_q-ième racine approchée de f. On sait que g_q est un polynôme quasi-ordinaire, que $c(f, g_q) = \dfrac{m_q}{n}$ et que $\mathrm{O}(f, g_q) = r_q$. Soit $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_h, g_{h+1})$ l'ensemble des d_k-ièmes racines approchées de f, $1 \leq k \leq h+1$, et rappelons que $deg_y(g_1) = 1$ et que $g_{h+1} = f$. Soit

$$B(\underline{g}) = \{\underline{\theta} \in \mathbb{N}^{h+1}; 0 \leq \theta_k < e_k \text{ pour tout } 1 \leq k \leq h \text{ et } \theta_{h+1} < +\infty\}.$$

Soit $F(\underline{x}, y)$ un polynôme unitaire de $\mathbf{R}$, alors F peut être écrit d'une façon unique sous la forme suivante :

$$F = \sum_{\underline{\theta} \in B(\underline{g})} c_\theta(\underline{x}) g_1^{\theta_1} \cdot \ldots \cdot g_h^{\theta_h} . g_{h+1}^{\theta_{h+1}}$$

Soit $\mathrm{Supp}_{\underline{g}}(F) = \{\underline{\theta} \in B(G), c_\theta(\underline{x}) \neq 0\}$ et $B'(G) = \{\underline{\theta} \in \mathrm{Supp}_G(F); \theta_{h+1} = 0\}$. Clairement f divise F si et seulement si $B'(G) = \emptyset$. Sinon, il existe $\underline{\theta} \in \mathrm{Supp}_{\underline{g}}(F)$ unique tel que $\mathrm{O}(f, F) = \mathrm{O}(f, c_{\underline{\theta}}(\underline{x}).g_1^{\theta_1} \cdot \ldots \cdot g_h^{\theta_h}) = \mathrm{O}(f, c^\theta x_1^{\theta_0^1} \cdot \ldots \cdot x_e^{\theta_0^e} g_1^{\theta_1} \cdot \ldots \cdot g_h^{\theta_h}) = \sum_{i=1}^e \theta_0^i r_0^i + \sum_{k=1}^h \theta_k r_k$.
On a aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.5 *Soit F un élément non-nul de $\mathbf{R}$, il existe un polynôme F_1 de $\mathbf{R}$, quasi-ordinaire cohérent avec f tel que $\mathrm{O}(f, F) = \mathrm{O}(f, F_1)$.*

Démonstration Résulte du fait que $g_1^{\theta_1} \cdot \ldots \cdot g_h^{\theta_h}$ est un polynôme quasi-ordinaire cohérent avec f.

3.4 La "fonction d'Artin modifiée" d'une singularité quasi-ordinaire

3.4.1 Définition et quelques propriétés

Soit $f = y^n + a_1(\underline{x})y^{n-1} + \ldots + a_n(\underline{x})$ un polynôme quasi-ordinaire distingué irréductible de $\mathbf{R}$ et soit $(m_1, \ldots, m_h), (r_1, \ldots, r_h), (d_1, \ldots, d_h, d_{h+1})$, et $(e_1, \ldots, e_h)$ les suites associées à f (comme déjà décrites dans la section précédente). On suppose que n est la multiplicité à l'origine de f, i.e $O_x a_i(x) \geq n-i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Définition 3.4.1 *La "fonction d'Artin modifiée" de f est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie de la façon suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\beta(i)$ est le plus petit entier vérifiant la propriété suivante : Pour tout $\phi(\underline{t}) \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$, si $\mathrm{O}_{\underline{t}}(f(\phi(\underline{t}))) \geq \beta(i)+1$, alors il existe $\psi(\underline{t})$ tel que $f(\psi(\underline{t}))=0$ et $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})-\psi(\underline{t})) \geq i+1$.*

Définition 3.4.2 *Soit $\phi(\underline{t}) \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$. On dit que $\phi(\underline{t})$ est congru à f modulo l'ordre i, et qu'on note $\phi \cong^i f$, s'il existe $\psi(\underline{t}) \in \mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$ tel que $f(\psi(\underline{t}))=0$ et $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})-\psi(\underline{t})) \geq i+1$.*

Lemme 3.4.3 *Pour tout $i \in \mathbb{N}, \beta(i)=\max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) | \phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f), \phi \ncong^i f\}$.*

Démonstration Soit $i \in \mathbb{N}$ et soit $\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$. Si $\phi \ncong^i f$, alors pour tout ψ vérifiant $f(\psi(\underline{t}))=0$, $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})-\psi(\underline{t})) \leq i$. En plus, d'après la définition de $\beta(i)$, si $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) \geq \beta(i)+1$ alors il existe $\psi(\underline{t})$ tel que $f(\psi(\underline{t}))=0$ et $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})-\psi(\underline{t})) \geq i+1$. Ceci montre que pour tout $\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$, si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) \leq \beta(i)$. En particulier,

$$\beta(i) \geq \max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) | \phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f), \phi \ncong^i f\}$$

Posons $\beta'(i)=\max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) | \phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$ et $\phi \ncong^i f\}$ et supposons que $\beta(i)>\beta'(i)$. Pour tout $\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$, si $\phi \ncong^i f$, alors $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t}))<\beta(i)$. En particulier, pour tout $\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$, si $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) \geq \beta(i)>\beta'(i)$, alors $\phi \cong^i f$, i.e. il existe $\psi(\underline{t})$ tel que $f(\psi(\underline{t}))=0$ et $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})-\psi(\underline{t})) \geq i+1$. Donc $\beta'(i)$ vérifie la propriété de la définition 3.4.1, mais $\beta'(i)<\beta(i)$. Ce qui contredit la minimalité de $\beta(i)$.

Lemme 3.4.4 *Soit $i \in \mathbb{N}$ et soit $\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$. Si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i$.*

Démonstration Si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})-\psi(\underline{t})) \leq i$ pour tout ψ tel que $f(\psi)=0$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver une racine $\psi(t)$ tel que $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\psi)$ est un multiple de k. En particulier il existe une racine ψ de f tel que $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\psi)>i$. Comme $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi-\psi) \leq i$, alors $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})) \leq i$.

Corollaire 3.4.5 *Avec les mêmes notations du lemme précédent, si $i<n$ et $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)=\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi_1)$, alors $\phi \ncong^i f$ si et seulement si $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i$.*

Démonstration Si $\phi \ncong^i f$ alors $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i$ par le lemme précédent. Supposons que $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i$ et soit $\psi \in \mathrm{QO}\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}$ une racine de $f(x_1, \ldots, x_e, y)=0$. Par hypothèse, $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\psi) \geq n$ et $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i<n$. Ce qui montre que $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi-\psi)=\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i$. En particulier $\phi \ncong^i f$.

3.4.2 Calcul de $\beta(i), i < n$

Avec les notations des sections précédentes on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.6 *Soit $1 \leq i \leq n-1$ et soit q l'unique entier tel que $\frac{n}{d_q} \leq i < \frac{n}{d_{q+1}}$. On a :*

$$\beta(i) = \max\{|r_1|i, |r_2|.[\frac{id_2}{n}], ...|r_q|.[\frac{id_q}{n}]\}$$

Où pour tout $r \in \mathbb{N}^e$, $|r|$ est défini comme étant la somme des composantes de r.

Démonstration Rappelons que $\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t}))|\phi(\underline{t}) \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f), \phi \not\cong^i f\}$ et que par le lemme 3.4.4, si $\phi \not\cong^i f$ alors $\mathrm{ord}_{\underline{t}}\phi(\underline{t}) \leq i$. Soit $\phi(\underline{t}) = ({t_1}^{mk}, ..., {t_e}^{mk}, y(t_1^k, \ldots, t_e^k)) \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$, si $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) < \mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi_1)$, alors $\mathrm{O}_{\underline{t}}(f(\phi)) \leq n.\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq ni \leq |r_1|.i$. D'autre part, soit $y(\underline{t}) = \sum_p c_p \underline{t}^p$ une racine de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$ et $\phi^1 = (t_1^i, \ldots, t_e^i, \sum_{|p| \geq |m_h|} c_p t^p)$, alors $\mathrm{O}_{\underline{t}}(f(\phi^1)) = |r_1|.i$. Par conséquent on a

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t}))|\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f), \phi \not\cong^i f \text{ et } \mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) = \mathrm{O}_{\underline{t}}(\phi_1)\}$$

mais par le corollaire 3.4.5, on a :

$$\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t}))|\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f), \mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) = \mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi_1) \leq i\}$$

Soit $\phi = (t_1^{mk}, \ldots, t_e^{mk}, z(t_1^k, \ldots, t_e^k))$ comme déjà donné, et supposons que $(t_1^m, \ldots, t_e^m, z(\underline{t})) \in (\mathrm{PQO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$. Soit $g = y^m + b_1(\underline{x})y^{m-1} + \ldots + b_m(\underline{x})$ le polynôme minimal de $z(x_1^{\frac{1}{m}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{m}})$ sur $\mathbf{K}((x_1, \ldots, x_n))$. Clairement $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) = k|\mathrm{O}(f, g)|$. Soit $c = c(f, g)$. Si $|nc| < |m_1|$, alors $\mathrm{O}(f, g) = n.m.c$, en particulier $k|\mathrm{O}(f, g)| = k.|m.n.c| \leq i.|n.c| \leq i.|m_1| = i.|r_1|$. Sinon, soit a l'unique entier tel que $|m_a| \leq |n.c| < |m_{a+1}|$ et soit $s = max\{j, m \simeq 0 \bmod \frac{n}{d_{j+1}}\}$. On a ou bien $a < s$, ou bien $nc = m_s = m_a$. Mais alors

$$k\mathrm{O}(f, g) = [r_a d_a + (nc - m_a)d_{a+1}].\frac{km}{n} \leq (r_{s+1}d_{s+1}).\frac{km}{n} = r_{s+1}.\frac{kmd_{s+1}}{n}$$

et comme $\frac{kmd_{s+1}}{n} \in \mathbb{N}$, et $km \leq i$, alors $\mathrm{O}(f, g) \leq r_{s+1}[\frac{id_{s+1}}{n}]$.
Par conséquent,

$$\beta(i) \leq \max\{|r_1|i, |r_2|.[\frac{id_2}{n}], \ldots, |r_q|.[\frac{id_q}{n}]\}$$

Pour avoir l'égalité, soient $1 \leq a \leq q$ et $k_a = [\frac{id_a}{n}]$. On pose $\phi^a = (t_1^{\frac{n}{d_a}.k_a}, ...t_e^{\frac{n}{d_a}.k_a}, \bar{y}(t_1^{k_a}, \ldots, t_e^{k_a}))$, où $y(\underline{t}) = \sum_p c_p \underline{t}^p$ est une racine de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$ et $\bar{y}(\underline{t}) = \sum_{|p| < |m_a|} c_p \underline{t}^{\frac{p}{d_a}}$. Dans ce cas, $\mathrm{O}_{\underline{t}}(f(\phi^a)) = k_a.|r_a|$.

3.4.3 Lien entre $\beta(i)$ et le semi-groupe de f

Les notations sont celles des sections précédentes, ordonnons $\mathbb{N}^e$ par rapport à l'ordre diagonal défini comme suit : soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^e$, on a

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ ou \\ |\alpha| = |\beta|, \alpha <_{lex} \beta \end{cases}$$

La "fonction d'Artin modifiée" peut ainsi être définie de la manière suivante : étant donné un entier $i \in \mathbb{N}$, soit $b(i)$ un élément de $\mathbb{N}^e$ tel que pour tout $\phi(\underline{t}) \in (QO\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}, f)$, si $\exp f(\phi(\underline{t})) > b(i)$ (où l'ordre est défini comme ci-dessus), alors il existe une racine $\psi(\underline{t})$ de f tel que $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi - \psi) > i$. On définit $\tilde{\beta}(i)$ comme étant l'élément minimal parmi l'ensemble des $b(i)$. Avec cette définition, le même argument que dans la section 3.4.2 montre que pour $i < n$, $\tilde{\beta}(i)$ =max$\{r_1.i, \ldots, r_h[\frac{id_h}{n}]\}$. En particulier $\tilde{\beta}(\frac{n}{d_q}) = r_q$ pour tout $q = 1, \ldots, h$.

3.4.4 Calcul de $\beta(i), i \geq n$

Les notations sont celles des sections 3.4.1, et 3.4.2., on se propose ici de calculer $\beta(i)$ pour $i \geq n$. On montre d'abord le résultat suivant :

Lemme 3.4.7 *Soit $i \in \mathbb{N}$ et soit $\phi \in \mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}, f)$. On pose $c = c(f, \phi)$. Si $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) = \mathrm{O}_{\underline{t}}(\phi_1), n|\mathrm{ord}_t(\phi)$, et $|c| > \dfrac{i}{\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)}$ alors $\phi \cong^i f$.*

Démonstration Soit $\phi(\underline{t}) \in \mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}$ tel que ϕ vérifie les conditions du lemme. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(\underline{t}) = (t_1^{np}, ..., t_e^{np}, \theta(\underline{t}))$. Soit $m, s \in \mathbb{N}$ tels que $\phi(\underline{t}) = (t_1^{ms}, ..., t_e^{ms}, z(t_1^s, ..., t_e^s))$ et que $\bar{\phi} = (t_1^m, ..., t_e^m, z(t_1, ..., t_e)) \in \mathrm{PQO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$. Soit $\psi(\underline{t}) = (t_1^{np}, \ldots, t_e^{np}, y(t_1^p, \ldots, t_e^p))$ une racine de f tel que $c(f, \bar{\phi}) = c(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ où $\bar{\psi} = (t_1^n, \ldots, t_e^n, y(t_1, \ldots, t_e))$. On a :

$$|c| = \frac{1}{nm}|\exp(z(t_1^n, ...t_e^n) - y(t_1^m, ...t_e^m))| = \frac{1}{np}|\exp(z(t_1^{\frac{np}{m}}, ...t_e^{\frac{np}{m}}) - y(t_1^{\frac{mp}{m}}, ...t_e^{\frac{mp}{m}}))|$$
$$= \frac{1}{np}|\exp(z(t_1^s, ...t_e^s) - y(t_1^p, \ldots, t_e^p))| > \frac{i}{ord_t(\phi)}$$

Mais $\phi(\underline{t}) - \psi(\underline{t}) = (0, \ldots, 0, (z(t_1^s, ...t_e^s) - y(t_1^p, \ldots, t_e^p))$. En particulier $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t}) - \psi(\underline{t})) > \dfrac{inp}{\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)} = i$. Ce qui montre notre assertion.

Théorème 3.4.8 *Si $i \geq n$ alors*

$$\beta(i) = \max\{ni, |r_1|.k_1(i), \ldots, |r_h|.k_h(i), \theta(i, q), 1 \leq q \leq h\}$$

où

$$k_q(i) = \begin{cases} [\frac{id_q}{n}] & si\ [\frac{id_q}{n}] \not\equiv 0 \quad mod \quad d_q \\ [\frac{id_q}{n}] - 1 & sinon \end{cases}$$

et :

$$\theta(i,q) = \begin{cases} [\frac{i}{|m_q|}](|r_q|d_q - |m_q|d_{q+1}) + id_{q+1} & si\ [\dfrac{i}{|m_{q+1}|}] < [\dfrac{i}{|m_q|}] \\ 0 & si\ [\dfrac{i}{|m_{q+1}|}] = [\dfrac{i}{|m_q|}] \end{cases}$$

Par convention, $|m_{h+1}| = +\infty$.

Démonstration Rappelons que $\beta(i) = \max\{\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) | \phi \not\cong^i f, \phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)\}$ et que par le lemme 3.4.4., si $\phi \not\cong^i f$ alors $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq i$. Soit $\phi \in (\mathrm{QO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$ et supposons que $\phi \not\cong^i f$. Par le lemme précédent on a trois cas :

1^{er} cas) $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) < \mathrm{O}_{\underline{t}}(\phi_1)$: dans ce cas, $\mathrm{O}_{\underline{t}}(f(\phi)) = \mathrm{O}_{\underline{t}}(y(\underline{t})^n) \leq n.\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) \leq ni$ et si $\phi = (0, \ldots, 0, t_1^i)$, alors $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(t)) = in$.

$2^{\text{ème}}$ cas) $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) = \mathrm{O}_{\underline{t}}(\phi_1)$ et n ne divise pas $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)$: écrivons $\phi(\underline{t}) = (t_1^{mk}, ..., t_e^{mk}, z(t_1^k, ...t_e^k))$ où $m, p \in \mathbb{N}$ et $(t_1^m, ..., t_e^m, z(\underline{t})) \in \mathrm{PQO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$. Soit $g = y^m + b_1(\underline{x})y^{m-1} + \ldots + b_m(\underline{x})$ le polynôme minimal de $z(x_1^{\frac{1}{m}}, \ldots, x_e^{\frac{1}{m}})$ sur $\mathbf{K}((x_1, \ldots, x_e))$, et posons $c = c(f,g)$. Comme $n = \dfrac{n}{d_{h+1}}$ ne divise pas m, alors $|nc| \leq |m_h|$. Si $|nc| < |m_1|$, alors $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi) = |k.\mathrm{O}(f,g)| = |k.n.m.c| \leq i.n$. Sinon, soit a l'unique entier tel que $|m_a| \leq |n.c| < |m_{a+1}|$ et soit $s = max\{j, m \simeq 0 \bmod \dfrac{n}{d_{j+1}}\}$. On a ou bien $a < s$ ou bien $nc = m_s = m_a$. Par conséquent $|k\mathrm{O}(f,g)| = \mathrm{O}_{\underline{t}}(f(\phi(\underline{t})) \leq mk.\dfrac{|r_{s+1}d_{s+1}|}{n}$. Soit l un entier vérifiant les conditions suivantes :

- (*)$l.\dfrac{n}{d_{s+1}} \leq i$.
- (**)n ne divise pas $l.\dfrac{n}{d_{s+1}}$.

Clairement $l \leq k_{s+1}(i)$. En plus, $k_{s+1}(i)$ vérifie les conditions (*) et (**). En particulier, $k_{s+1}(i)$ est le plus grand entier l pour lequel les conditions (*) et (**) sont satisfaites.

D'autre part, $mk = \mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi(\underline{t})) \leq i$ et n ne divise pas mk. D'où $m.k.\dfrac{d_{s+1}}{n}$ vérifie les conditions (*) et (**), en particulier $m.k \leq \dfrac{n}{d_{s+1}} k_{s+1}(i)$. Ceci implique que $\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) \leq k_{s+1}(i).|r_{s+1}|$.

L'égalité est atteinte pour

$$\phi(\underline{t}) = (t_1^{\frac{n}{d_{s+1}}.k_{s+1}(i)}, ..., t_e^{\frac{n}{d_{s+1}}.k_{s+1}(i)}, \sum_{|p|<|m_{s+1}|} c_p \underline{t}^{k_{s+1}(i).\frac{p}{d_{s+1}}}),$$

où $y(\underline{t}) = \sum_p c_p \underline{t}^p$ une racine de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$.

$3^{\text{ème}}$ cas) $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi) = \mathrm{O}_{\underline{t}}(\phi_1)$, n divise $\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)$, et $|c| \leq \dfrac{i}{\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)}$: écrivons $\phi(\underline{t}) = (t_1^{np}, ..., t_e^{np}, z(\underline{t})) = (t_1^{mk}, ..., t_e^{mk}, \theta(t_1^k, ..., t_e^k))$ où $p, m, k \in \mathbb{N}$ et $(t_1^m, ..., t_e^m, \theta(\underline{t})) \in \mathrm{PQO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1})$. Comme $|c| \leq$

$\dfrac{i}{\mathrm{ord}_{\underline{t}}(\phi)} = \dfrac{i}{np}$, alors $n.|c| \leq \dfrac{i}{p}$. Soit q tel que $|m_q| \leq \dfrac{i}{p} < |m_{q+1}|$. Comme $\dfrac{i}{|m_{q+1}|} < p \leq \dfrac{i}{|m_q|}$ alors $[\dfrac{i}{|m_{q+1}|}] + 1 \leq p \leq [\dfrac{i}{|m_q|}]$ (notons que si $q = h$ alors par convention, $\dfrac{i}{|m_{q+1}|} = 0$).
Soit $1 \leq q' \leq h$ tel que $|m_{q'}| \leq |nc| < |m_{q'+1}|$, alors

$$\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) = |\frac{km}{n}(r_{q'}d_{q'} + (nc - m_{q'})d_{q'+1})|$$

Mais $n|c| \leq \dfrac{i}{p}$, en particulier $q' \leq q$ (en effet, $|m_{q'}| \leq n|c| < |m_{q'+1}|$ et $|m_q| \leq \dfrac{i}{p} < |m_{q+1}|$).
- Si $q' < q$, alors :

$$\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) = \frac{km}{n}|r_{q'}d_{q'} + (nc - m_{q'})d_{q'+1}| = p.|r_{q'}d_{q'} + (nc - m_{q'})d_{q'+1}|$$

$$\leq p.|r_{q'+1}d_{q'+1}| \leq [\frac{i}{|m_q|}].|r_q|d_q.$$

Mais

$$i.d_{q+1} = |m_q|d_{q+1}.\frac{i}{|m_q|} \geq |m_q|d_{q+1}[\frac{i}{|m_q|}]$$

alors,

$$\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) \leq [\frac{i}{|m_q|}]|r_q|d_q - [\frac{i}{|m_q|}]|m_q|d_{q+1} + [\frac{i}{|m_q|}]|m_q|d_{q+1}$$

$$\leq [\frac{i}{|m_q|}]|r_q|d_q - [\frac{i}{|m_q|}]|m_q|d_{q+1} + id_{q+1} = \theta(i,q)$$

- Si $q' = q$, alors

$$\mathrm{O}_{\underline{t}} f(\phi(\underline{t})) = p|r_q d_q - m_q d_{q+1}| + id_{q+1} \leq [\frac{i}{|m_q|}]|r_q d_q - m_q d_{q+1}| + id_{q+1} = \theta(i,q)$$

L'égalité est atteinte pour

$$\phi(\underline{t}) = (t_1^{np}, ...t_e^{np}, y_1'(\underline{t})) = \sum_{j, |j| < \frac{i}{p}} c_j \underline{t}^{pj} + Z t_1^i$$

où $y(\underline{t}) = \sum_j c_j \underline{t}^j$ une racine de $f(t_1^n, \ldots, t_e^n, y) = 0$, $p = [\dfrac{i}{|m_q|}]$ et Z est un élément générique de $\mathbf{K}$. Soit $\phi(\underline{t}) = (t_1^{mk}, ...t_e^{mk}, \rho(t_1^k, ...t_e^k))$ où $m, k \in \mathbb{N}$ et $(t_1^m, ...t_e^m, \rho(\underline{t})) \in (\mathrm{PQO}(\mathbf{K}[[\underline{t}]]^{e+1}), f)$. On a

$$\rho(t_1^n, \ldots, t_e^n) = y_1'(t_1^{\frac{n}{k}}, \ldots, t_e^{\frac{n}{k}}) = \sum_{j, |j| < \frac{i}{p}} c_j . \underline{t}^{jm} + Z t_1^{\frac{ni}{k}}$$

et un calcul direct montre que, pour un bon choix de Z, $|c| = \dfrac{i}{np}$.

Exemple 3.4.9 *Soit* $f(x_1, x_2, y) = (y^2 - x_1^2 x_2)^2 - x_1^5 x_2^2 y \in \mathbf{K}[[x_1, x_2]][y]$. *Alors* f *est un polynôme quasi-ordinaire et par le critère donné dans [5]* f *est irréductible. De plus,* $g_1 = y$ *et* $g_2 = y^2 - x_1^2 x_2$ *sont les racines approchées de* f*. Les suites caractéristiques de* f *sont données par :* $r_0^1 = (4,0), r_0^2 = (0,4), r_1 = O(f, g_1) = (4,2), r_2 = O(f, g_2) = (12,5)$*,* $d_1 = 4, d_2 = 2, d_3 = 1$*,* $m_1 = r_1 = (4,2), m_2 = (8,3), m_3 = (+\infty, +\infty)$*. Par le calcul* $\tilde{\beta}(1) = r_1, \tilde{\beta}(2) = r_2, \tilde{\beta}(3) = \max(3r_1, [3.\dfrac{2}{6}].r_2) = 3r_1$*, en particulier* $\beta(1) = 6, \beta(2) = 17, \beta(3) = 18$*. D'autre part, pour* $i \geq 4$*,on a :*

$$k_1(i) = \begin{cases} [\frac{id_1}{n}] = i & si\ [\frac{id_1}{n}] = i \not\equiv 0 \quad mod \quad 4 \\ [\frac{id_1}{n}] - 1 = i - 1 & sinon \end{cases}$$

$$k_2(i) = \begin{cases} [\frac{id_2}{n}] = [\dfrac{i}{2}] & si\ [\frac{id_2}{n}] = [\dfrac{i}{2}] \not\equiv 0 \quad mod \quad 2 \\ [\frac{id_2}{n}] - 1 = [\dfrac{i}{2}] - 1 & sinon \end{cases}$$

$$\theta(i,1) = \begin{cases} [\frac{i}{|m_1|}](|r_1|d_1 - |m_1|d_2) + id_2 = 12[\dfrac{i}{6}] + 2i & si\ [\dfrac{i}{|m_2|}] = [\dfrac{i}{11}] < [\dfrac{i}{|m_1|}] = [\dfrac{i}{6}] \\ 0 & si\ [\dfrac{i}{11}] = [\dfrac{i}{6}] \end{cases}$$

$$\theta(i,2) = \begin{cases} [\frac{i}{|m_2|}](|r_2|d_2 - |m_2|d_3) + id_3 = 23[\dfrac{i}{11}] + i & si\ [\dfrac{i}{|m_3|}] = 0 < [\dfrac{i}{|m_2|}] = [\dfrac{i}{11}] \\ 0 & si\ 0 = [\dfrac{i}{11}] \end{cases}$$

En utilisant la formule trouvée dans 3.4.8, on a : $\beta(4) = |r_1|k_1(4) = 18, \beta(5) = |r_1|k_1(5) = 30$*, et* $\beta(6) = |r_2|k_2(6) = 51$ *et que* $\beta(i) = |r_2|.k_2(i), i \geq 7$.

Remarque 3.4.10 *Dans son papier, M. Hickel [15] a montré que la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane est du type Pas-Presburg, i.e. il existe* $d, N \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $i > N$*,* $\beta(i) = a_{\rho(i)} i + b_{\rho(i)}$ *où* $\rho(i)$ *désigne la classe de* i *modulo* d*. Dans le cas présent, on a* $\beta(i) = |r_h|.k_h(i)$ *pour* $i >> 0$.
En effet soit $q < h$*,*

$$|r_q|.k_q(i) \leq |r_q|.\frac{id_q}{n} = |r_q|.\frac{id_h}{n}.\frac{d_q}{d_h}$$

mais

$$|r_q|.\frac{d_q}{d_h} \leq |r_h| - 1$$

en particulier

$$|r_q|.k_q(i) \leq |r_h|.\frac{id_h}{n} - \frac{id_h}{n}$$

Mais $\dfrac{id_h}{n} = [\dfrac{id_h}{n}] + \dfrac{R}{n}$ *avec* $0 \leq R < n$*, par conséquent* $|r_q|.k_q(i) \leq |r_h|.k_h(i)$.

D'autre part,

$$\theta(i,q) \leq \frac{i}{|m_q|}(|r_q|d_q - |m_q|d_{q+1}) + id_{q+1} = \frac{i}{|m_q|}|r_q|d_q \leq |r_h|.k_h(i)$$

De plus, $\theta(i,h) \leq \frac{i}{|m_h|}.|r_h|.d_h = \frac{n}{|m_h|}.|r_h|.\frac{id_h}{n}$. *Mais* $|r_h|.\frac{id_h}{n} \simeq |r_h|.k_h(i)$ *et* $\frac{n}{|m_h|} < 1$, *d'où* $\theta(i,q) \leq |r_h|.k_h(i)$ *pour* $q \leq h$. *En particulier, pour* $i >> 0$, $\beta(i) = |r_h|.k_h(i)$.
En particulier, la "fonction d'Artin modifiée" de f *est du type Pas-Presburg avec* $d = \frac{n}{d_h}$.

3.5 La fonction d'Artin-Greenberg pour les singularités quasi-ordinaires

Soit $f(x_1,\ldots,x_e,y) = y^n + a_1(\underline{x})y^{n-1} + \ldots + a_n(\underline{x})$ un polynôme quasi-ordinaire irréductible de $\mathbf{K}[[x_1,\ldots,x_e]][y]$. On associe à f le polynôme $F(x,y) = f(x,x,\ldots,x,y)$. On note la "fonction d'Artin modifiée" de f par β_f et celle d'Artin-Greenberg de F par β_F.

Lemme 3.5.1 *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$,

$$\beta_F(i) = \max\{\mathrm{O}_t f(\phi(t)) | \phi \in \mathbf{K}[[t]]^{e+1}, \phi \not\cong^i F\}$$

Démonstration Voir lemme 3.4.3.

Proposition 3.5.2 *Supposons que* $f = y^n - x_1^{m_1}\ldots.x_e^{m_e}$ *où* $pgcd(n,m_1,\ldots,m_e) = 1$. *Si* $F(x,y) = f(x,x,\ldots,x,y)$ *est irréductible dans* $\mathbf{K}[[x]][y]$ *alors pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $\beta_F(i) = \beta_f(i)$.

Démonstration $F(x,y) = f(x,x,\ldots,y) = y^n - x^{\sum m_j}$, notons $m = \sum m_j$. Comme F est irréductible alors :
  i) $i < n \Longrightarrow \beta_F(i) = \sum_{j=1}^{e} m_j.i = \beta_f(i)$.
  ii) $i \geq n$: dans ce cas, alors d'après les formules du chapitre 2., on a

$$\beta_F(i) = max\{n.i, m.k_F^1(i), \theta_F(i,1)\}$$

mais $\theta_F(i,1) = [\frac{i}{m}](m.n - m) + i \leq n.i$, d'où $\beta_F(i) = max\{n.i, mk_F^1(i)\}$ où

$$k_F^1(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \not\equiv 0 \quad mod \quad n \\ i-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autre part

$$\beta_f(i) = max\{n.i, \sum_j m_j.k_f^1(i)\}$$

où

$$k_f^1(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \not\equiv 0 \quad mod \quad n \\ i-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\beta_F(i) = \beta_f(i)$

Proposition 3.5.3 *Supposons que* $f = y^n - x_1^{m_1} \dots .x_e^{m_e}$ *où* $pgcd(n, m_1, \dots, m_e) = 1$ *et que* $F(x, y) = f(x, x, \dots, y)$ *n'est pas nécessairement irréductible dans* $\mathbf{K}[[x]][y]$. *On a :*

$$\beta_F(i) = \beta_f(i) \Longleftrightarrow \mathrm{pgcd}(n, \sum_j m_j) < n$$

Démonstration $F(x, y) = f(x, x, \dots, y) = y^n - x^{\sum m_j}$, si F est réductible alors $\mathrm{pgcd}(n, \sum m_j) = d > 1$.

i) Si d alors $F(x, y) = \prod_{i=1}^n y - y_j(x)$ où $y_j(x) = w^j.x^{\frac{\sum m_j}{n}}$, avec w est une racine n-ième primitive de l'unité. Dans ce cas $\beta_F(i).i$.
D'autre part, $\beta_f(i) = \sum m_j.i, i < n$, d'où, $\beta_F(i) < \beta_f(i)$.

ii) Sinon, il existe n', m' tel que $n = n'.d, \sum m_j = m'.d$. De plus

$$F(x, y) = \prod_{j=1}^{d} (y^{n'} - y_j(x))$$

et pour tout $1 \leq j \leq d, y_j(x) = w^j.x^{m'}$ où w est une racine n-ième primitive de l'unité. Soit $G_j(x, y) = y^{n'} - y_j(x)$, on voit que les $G_i(x, y)$ sont équisinguliers, par conséquent $\beta_F(i) = d.\beta_{G_1}(i)$.

ii.1) Si $i < n$ alors $\beta_{G_1}(i) = i.m'$, par conséquent $\beta_F(i) = \sum_{j=1}^e m_j.i = \beta_f(i)$.

ii.2) Si $i \geq n$, alors d'après les formules du chapitre 2, on a

$$\beta_{G_1}(i) = \max\{n'.i, m'(i-1), \theta_G(i, 1)\}$$

mais $\theta_{G_1}(i, 1) = [\frac{i}{m'}](m'.n' - m') + i \leq n'.i$, d'où

$$\beta_{G_1}(i) = max\{n'.i, m'(i-1)\}$$

en particulier

$$\beta_F(i) = d.\max\{n'.i, m'(i-1)\} = max\{n.i, \sum_j m_j(i-1)\}.$$

En appliquant la même procédure à f on trouve que

$$\beta_f(i) = max\{n.i, \sum_j m_j.(i-1)\}.$$

D'où l'égalité.

3.6 Calcul de la "fonction d'Artin modifiée" avec MAPLE

```
> pgcd := proc (liste : :list) ♯ Calcule le pgcd d'une liste
if nops(liste) = 1 then op(liste)
```

else gcd(op(1, liste), pgcd([op(2 .. nops(liste), liste)]))
end if
end proc :

> with(linalg) ; with(combinat) ; M := proc (L : :list, e : :integer) ♯ Calcule le pgcd des mineurs d'une matrice d'ordre e
local S, S1, S2, i, j, P, M, Det, H, M1, d ;
S := op(L) ;
S1 := choose(S, e) ;
P := [op(S1)] ;
for j from 1 to nops(P) do M[j] := matrix([op(P[j])]) ;
Det[j] := det(M[j]) end do ; M1 := [seq(M[j], j = 1 .. nops(P))] ;
Det := [seq(Det[i], i = 1 .. nops(P))] ;
d := pgcd(Det)
end proc :

> diviseur := proc (r : :list, e) ♯ Calcule la suite des pgcd d'une liste
local a, D ;
D[1] := M([op(1 .. e, r)], e) ;
for a from 2 to nops(r)+1-e do D[a] := M([op(1 .. e+a-1, r)], e) end do ;
[seq($\dfrac{D[a]}{D[nops(r)+1-e]}$, a = 1 .. nops(r)+1-e)]
end proc :

> m := proc (r : :list, e) ♯ Calcule la suite $(m_i)_{0\leq i\leq h}$
local a, m, d ;
d := diviseur(r, e) ;
for a to e do m[a] := r[a] end do ;
m[e+1] := r[e+1] ;
for a from e+2 to nops(r) do m[a] := r[a]+m[a-1]-r[a-1]*$\dfrac{d[a-2]}{d[a-1]}$ end do ;
[seq(m[a], a = 1 .. nops(r))] end proc ;
> k := proc (r : :list, e, i) ♯ Calcule $k_a(i)$
local a, k, d ;
d := diviseur(r, e) ;
for a to nops(r)-e do
if 'mod'(floor(i*$\dfrac{d[a]}{d[1]}$), d[a]) = 0
then k[a] := floor(i*$\dfrac{d[a]}{d[1]}$)-1
else k[a] := floor(i*$\dfrac{d[a]}{d[1]}$) end if end do ;
[seq(k[a], a = 1 .. nops(r)-e)]
end proc :
> S := proc (l : :list) ♯ Calcule la somme des termes d'une liste

```
local s, a ;
s[1] := l[1] ;
for a from 2 to nops(l) do s[a] := s[a-1]+l[a] end do
if nops(l)=1 then s[1]
else s[nops(l)] fi ;
end proc :
```

```
> R := proc (r : :list) ♯ Calcule |r_i|
local T, a ;
for a to nops(r) do T[a] := S(r[a]) end do ;
[seq(T[a], a = 1 .. nops(r))]
end proc :
```

```
> θ := proc (r : :list, e, i) ♯ Calcule θ(i, a)
local a, y, theta, d, r2, m2, M ;
r2 := R(r) ;
m2 := m(r, e) ;
M := R(m2) ; d := diviseur(r, e) ;
for a to nops(r)-e-1 do
if 0 < iquo(i, M[a+e])-iquo(i, M[a+e+1]) then
theta[a] := iquo(i, M[a+e])*(r2[a+e]*d[a]-M[a+e]*d[a+1])+i*d[a+1]
else θ[a] := 0 end if end do ;
if 0 < iquo(i, M[nops(r)]) then
y := iquo(i, M[nops(r)])*(r2[nops(r)]*d[nops(r)-e]-M[nops(r)])+i
else y := 0 end if ; [seq(theta[a], a = 1 .. nops(r)-e-1), y]
end proc :
```

```
> beta := proc (r : :list, e, i : :integer) ♯ Calcule β(i)
local d, k2, theta2, a, B, M, r2, m1 ;
d := diviseur(r, e) ;
m1 := m(r, e) ;
M := R(m1) ;
r2 := R(r) ;
k2 := k(r, e, i) ;
theta2 := theta(r, e, i) ;
if i < d[1] then B := max(seq(iquo(i*d[a], d[1])*r2[a+e], a = 1 .. nops(r)-e))
else B := max(d[1]*i, seq(k2[a]*r2[a+e], a = 1 .. nops(r)-e), seq(theta2[a], a = 1 .. nops(r)-e))
end if :
end proc :
```

Bibliographie

[1] S.S.Abhyankar.- On the ramification of algebraic functions, Amer. J. Math. 77 (1955), 575-592.

[2] S.S.Abhyankar.- Lectures on expansion techniques in algebraic geometry, Tata Institue of Fundamental Research, Bombay, 1977.

[3] S.S.Abhyankar, A. Assi.- Jacobian of meromorphic curves, Proc. Mathematical Sciences, Springer India, vol.109, n^o 2 (mai 1999)117-163

[4] M.Artin.- Algebraic approximation of structures over complete local rings, Institut des Hautes Etudes Sci. Pub Math., 36 (1969), 23-58.

[5] A.Assi.- Irreducibility criterion for quasi-ordinary polynomials, preprint, http ://arxiv.org/pdf/0904.4413v

[6] A.Campillo, F.Delgado, S.M.Gusein-Zade.- On generators of the semigroup of a curve singularity, J. London Math. Soc.(2) 60(1999), 420-430.

[7] C.Cuesta-Sainz.- Funcion de Artin para Germenes Irreducibles de Curvas Planas, Tesis de Tercer Ciclo, Universidad de Valladollid, Departemento de Algebra y Geometria, 1999.

[8] F.Delgado de la Mata.- The semigroup of values of a curve singularity with several branches, Manuscripta Mathematica, tome 59 (1987), 347-374 .

[9] F.Delgado de la Mata.- A factorization theorem for the polar of a curve with two branches, Compositio Mathematica, tome 92, n^o 3 (1994), 327-375 .

[10] J.Denef, L.Lipshitz.- Ultra products and approximation in local rings II, Math. Ann., 253 (1980), 1-28.

[11] A.Garcia.- Semigroups associated to singular points of plane curves, J.Reine. Angew. Math., 336(1981), 165-184.

[12] P.D. Gonzalez Perez.- The semigroup of a quasi-ordinary hypersurface, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, n^o 2 (2003), 383-399.

[13] M.Greenberg.- Rational points in Henselian discrete valuation rings, Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. Math., 31 (1966), 59-64.

[14] M.Hickel.- Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espaces analytiques, Amer. J. Math., 115 (1993), 1299-1334.

[15] M.Hickel.- Calcul de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche de courbe plane, Pacific Journal of Math., vol 213, n 1 (2004), 37-46.

[16] K.Kiyek and M.Micus.- Semigroup of a quasiordinary singularity, Banach Center Publications, Topics in Algebra, Vol. 26 (1990), 149-156.

[17] M.Lejeune Jalabert.- Sur l'équivalence des singularités des courbes algebroides planes. Coefficients de Newton, Thesis, 1972.

[18] M.Lejeune Jalabert.- Courbes tracées sur un germe d'hypersurfaces, Amer. J. of Math., 112 (1990), 525-568.

[19] J.Lipman.- Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces, Thesis, Harvard University (1965).

[20] J.Lipman.- Topological invariants of quasi-ordinary singularities, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 388 (1988).

[21] G.Pfister, D.Popescu.- Die strange approximationeigenschaft lokaler ringe, Invent. Math., 30 (1975), 145-174.

[22] P.Popescu-Pampu.- Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d'adjacence pour les 3-variétés réelles, Thèse de doctorat de l'université de Paris 7 (2001).

[23] R.J.Walker.- Algebraic curves. Princeton University Press, 1950.

[24] J.J.Wavrik.- A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures, Math. Ann., 216 (1975), 127-142.

[25] O.Zariski.- Studies in equisingularity I, Amer. J. Math., 87 (1965), 507-536.

[26] O.Zariski.- Studies in equisingularity II, Amer. J. Math., 87 (1965), 972-1006,.